研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

物理学与偏微分方程

（第二版）（下册）

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume II)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

研究生教学用书　教育部研究生工作办公室推荐



ISBN 7-04-015954-6

9 787040 159547 >

定价 29.70 元

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

物理学与偏微分方程

（第二版）（下册）

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume II)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是教育部研究生工作办公室推荐的"研究生教学用书"，是在第一版的基础上修订而成的。这次修订除了改正了第一版中的几处印刷错误，并在第五章第四节末尾加了一小段外，其余未作改动。

本书力求在物理与偏微分方程之间架设一座桥梁，帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生、高年级大学生及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程，了解其来龙去脉及推导过程，理解现今国际上一些重要并常见的偏微分方程数学模型，从而可以更自觉地学习和运用，并会抓住一些有意义的问题开展研究工作。

全书分上、下两册出版。下册共5章，从最基本的物理概念出发分别介绍了热弹性力学、粘弹性力学、气体分子运动论、狭义相对论和相对论流体力学、量子力学，重点介绍建立它们的基本方程的全过程，并对这些方程在数学上的结构与特征作简略的说明，还有选择地介绍了近年来国际上的一些最近的研究成果。

图书在版编目(CIP)数据

物理学与偏微分方程．下册/李大潜，秦铁虎编著．
—2版．—北京：高等教育出版社，2005.4
ISBN 7-04-015954-6

Ⅰ．物… Ⅱ．①李…②秦… Ⅲ．①物理学-研究生-教学参考资料②偏微分方程-研究生-教学参考资料 Ⅳ．①O4②O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025793号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
		版　次	2000年6月第1版 2005年4月第2版
开　本	787×960　1/16		
印　张	20	印　次	2005年4月第1次印刷
字　数	340 000	定　价	29.70元

物料号　15954-00

目　录

第六章　热弹性力学 …………………………………………(1)

§1. 引　言 …………………………………………(1)

§2. 能量守恒定律和熵不等式 …………………………………………(2)

2.1. 能量守恒定律 …………………………………………(2)

2.2. 熵不等式 …………………………………………(7)

§3. 热弹性力学的本构关系 …………………………………………(9)

3.1. 本构关系　自由能 …………………………………………(9)

3.2. 热传导的方向性 …………………………………………(12)

3.3. 线性热弹性 …………………………………………(14)

§4. 热弹性动力学方程组及其数学结构 …………………………………………(18)

4.1. 线性热弹性动力学方程组 …………………………………………(18)

4.2. 非线性热弹性动力学方程组 …………………………………………(22)

4.3. 一维非线性热弹性动力学方程组 …………………………………………(25)

§5. 加速度波的传播 …………………………………………(30)

习题 …………………………………………(36)

参考文献 …………………………………………(38)

第七章　粘弹性力学 …………………………………………(40)

§1. 引　言 …………………………………………(40)

1.1. 粘弹性材料 …………………………………………(40)

1.2. 简单的粘弹性单元 …………………………………………(42)

§2. 粘弹性材料的本构方程和耗散不等式 …………………………………………(45)

2.1. 单积分形式的本构方程 …………………………………………(45)

2.2. 耗散不等式及其推论 …………………………………………(51)

2.3. 线性粘弹性本构方程 …………………………………………(60)

§3. 粘弹性力学方程组及其定解问题 …………………………………………(71)

3.1. 线性粘弹性动力学方程组 …………………………………………(71)

3.2. 非线性粘弹性动力学方程组 …………………………………………(77)

3.3. 一维非线性粘弹性动力学方程 …………………………………………(80)

§4. 核的奇性与线性波的传播 …………………………………………(83)

§5. 加速度波的传播 ……(92)
习题 ……(97)
参考文献 ……(100)
第八章　气体分子运动论 ……(101)
§1. 引　言 ……(101)
§2. 玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程 ……(102)
2.1. 分布函数 ……(102)
2.2. 玻尔兹曼方程 ……(105)
2.3. 二体碰撞 ……(107)
2.4. 碰撞项 J 的决定 ……(113)
§3. 稀疏气体的平衡态 ……(116)
3.1. 玻尔兹曼 H 定理 ……(116)
3.2. 麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布 ……(119)
§4. 守恒定律 ……(124)
§5. 零阶近似 ……(131)
§6. 一阶近似 ……(134)
6.1. 恰普曼 - 恩斯科格 (Chapman–Enskog) 展开 ……(134)
6.2. 积分方程的可解性 ……(138)
6.3. 粘性系数和导热系数 ……(140)
§7. 伏拉索夫 (Vlasov) 方程及耦合方程组 ……(146)
7.1. 伏拉索夫方程 ……(146)
7.2. 伏拉索夫 - 泊松 (Vlasov–Poisson) 方程组 ……(146)
7.3. 伏拉索夫 - 麦克斯韦 (Vlasov-Maxwell) 方程组 ……(148)
7.4. 伏拉索夫耦合方程组的数学结构及其定解问题 ……(153)
习题 ……(158)
参考文献 ……(160)
第九章　狭义相对论和相对论流体力学 ……(161)
§1. 引　言 ……(161)
1.1. 相对性原理与伽利略 (Galileo Galilei) 变换 ……(161)
1.2. 麦克斯韦电磁场理论与伽利略相对性原理 ……(163)
§2. 狭义相对论的基本原理　洛伦兹变换 ……(164)

2.1. 狭义相对论的基本假设 ......(164)
2.2. 洛伦兹变换 ......(165)
§3. 狭义相对论的时空观 ......(173)
3.1. 同时的相对性 ......(173)
3.2. 运动时间的膨胀 ......(177)
3.3. 杆长沿运动方向的收缩 ......(178)
3.4. 闵可夫斯基 (H. Minkowski) 四维时空 ......(179)
3.5. 任何传输速度均不能超过真空中的光速 ......(182)
§4. 相对论动力学 ......(183)
4.1. 闵可夫斯基四维时空中的张量 ......(183)
4.2. 四维速度与四维能量 - 动量向量 ......(186)
4.3. 动量与能量守恒定律 ......(189)
§5. 相对论流体力学 ......(192)
5.1. 能量 - 动量张量 ......(193)
5.2. 守恒律方程组 ......(196)
5.3. 简化的状态方程 ......(201)
§6. 相对论流体力学方程组的数学结构 ......(202)
6.1. 熵方程的另一种形式 ......(202)
6.2. 相对论流体力学方程组的数学结构 ......(203)
6.3. 一维相对论流体力学方程组 ......(209)
§7. 相对论磁流体力学方程组 ......(214)
7.1. 麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性 ......(214)
7.2. 电磁场的能量 - 动量张量 ......(220)
7.3. 理想磁流体的能量 - 动量张量 ......(221)
7.4. 相对论理想磁流体力学方程组 ......(223)
习题 ......(227)
参考文献 ......(230)
第十章 量子力学 ......(232)
§1. 量子力学的建立 ......(232)
1.1. 黑体辐射和普朗克 (M.Plank) 的量子论 ......(232)
1.2. 光电效应和爱因斯坦的光量子说 ......(235)
1.3. 原子光谱和玻尔 (N. Bohr) 的氢原子模型 ......(236)
1.4. 德布罗意 (de Broglie) 的物质波假设 ......(238)
1.5. 量子力学的建立 ......(239)

§2. 薛定谔方程与波函数 ......(240)
2.1. 薛定谔方程 ......(241)
2.2. 波函数的意义 ......(243)
2.3. 薛定谔方程的数学结构 ......(248)
2.4. 定态的薛定谔方程 ......(252)
§3. 量子力学基本原理简介 ......(260)
3.1. 有关量子力学原理的基本假设 ......(260)
3.2. 算子的对易关系 ......(262)
3.3. 测不准关系 ......(264)
§4. 相对论量子力学与狄拉克 (Dirac) 方程 ......(266)
4.1. 克莱因 – 高登 (Klein–Gordon) 方程 ......(266)
4.2. 电子自旋 ......(267)
4.3. 狄拉克方程 ......(271)
4.4. 自由电子的平面波解 ......(279)
4.5. 狄拉克方程组的数学结构 ......(283)
4.6. 狄拉克方程组的洛伦兹不变性 ......(287)
习题 ......(294)
参考文献 ......(297)
附录三 闵可夫斯基四维时空中的张量 ......(298)
1. 闵可夫斯基四维时空与洛伦兹变换 ......(298)
2. 闵可夫斯基四维时空中的张量 ......(300)
3. 张量的计算 ......(303)
4. 张量的协变导数 ......(304)
索引 ......(305)

第六章 热弹性力学

§1. 引 言

在第五章中，我们仅讨论了弹性体在机械荷载作用下产生的变形和应力，而没有考虑温度变化所产生的影响. 其实，弹性体内温度的变化会引起附加的应变和应力. 在本章中，我们要着重讨论温度变化对弹性体变形产生的影响，即讨论热弹性体的变形及其内部温度分布所遵从的规律.

什么是热弹性体？ *热弹性体* 指具有下述特征的物体：原先处在自然状态（内部既无变形也无温度梯度）的物体，受到机械荷载及热环境的作用所发生的变形和温度场的变化，在机械荷载和热环境撤消后会立即消失，使物体恢复到原来的自然状态，既不留下永久变形也再无温度梯度.

要得出热弹性体的变形和温度分布的规律，即建立热弹性力学的数学模型 —— 热弹性力学方程组，如同第五章对弹性体已作过的那样，必须给出相应的守恒律方程组及本构关系. 由于质量守恒定律和动量守恒定律与弹性体的温度变化无关，所以第五章导出的这两个守恒定律对热弹性体仍然成立. 但由于对热弹性体的讨论要考虑温度的变化，热弹性体不同部分之间有热量的传递，除上述两个守恒定律外，还应建立相应的 *能量守恒定律*. 此外，从热力学的观点看，热的传导是一个不可逆的过程，仅仅依靠能量守恒定律还不足以判断一个过程能否进行，还必须建立相应的 *熵不等式*. 同时，在弹性力学的本构关系中，有关的量表示为变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的函数；而在热弹性力学中，由于要考虑由温度及温度梯度引起的变形及热传导现象，在相应的本构关系中，有关的量就应该同时表示为变形梯度张量、绝对温度及温度梯度的函数.

在本章中，我们将沿用第五章中的有关记号.

§2. 能量守恒定律和熵不等式

2.1. 能量守恒定律

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为热弹性体的参考构形，即热弹性体变形前 (设为时刻 $t=0$) 在空间占据的区域. 在此区域中的点以 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 表示. 到时刻 $t\ (>0)$, 设热弹性体所占的区域由 Ω 变为 Ω_t. 这个变形由

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$$

描述，其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\Omega_t$.

对任意给定的区域 $G_t\subset\Omega_t$, 我们来考察 G_t 中总能量的变化情况. 对弹性体而言，总能量是动能和应变能之和. 而对热弹性体，由于要考察由于温度变化引起的不同部分之间热量的传递，应以内能代替应变能. 这样， G_t 中的总能量应为总动能与总内能之和. 当然，这里的内能既包括热力学内能也包含应变能.

G_t 中的总动能为

$$\int_{G_t}\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}y,$$

其中 ρ 为物体的质量密度， $\boldsymbol{v}$ 为速度向量. 又设热弹性体单位质量的内能为 e, 则 G_t 中总内能为

$$\int_{G_t}\rho e\mathrm{d}y.$$

由能量守恒定律， G_t 中总能量的变化率应等于单位时间内 G_t 中体积力和 G_t 的边界 S_t 上的应力所作的功、 G_t 中热源产生的热量以及由 S_t 流入 G_t 中的热量这四部分之和.

设体积力密度，即单位质量的体积力为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 则单位时间内体积力作的功为

$$\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y.$$

此外， Ω_t 中 G_t 以外的部分作用在 G_t 的边界 S_t 上的应力为 $\boldsymbol{T\nu}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 为柯西应力张量 (见第五章 §3.5), 而 $\boldsymbol{\nu}$ 为 S_t 上的单位外法线向

量. 这样, 单位时间内 S_t 上应力作的功为

$$\int_{S_t} (\boldsymbol{T\nu}) \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S_t.$$

设热弹性体的热源密度, 即单位时间内单位质量所产生的热量为 γ, 则单位时间内 G_t 中热源产生的热量为

$$\int_{G_t} \rho\gamma \mathrm{d}y.$$

另设 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)^{\mathrm{T}}$ 为热流密度向量: 它的方向为热流即热传导的方向, 而它的模长则表示单位时间内通过垂直于热流方向的单位面积的热量. 这样, 对 S_t 上的任意面积微元 $\mathrm{d}S_t$, 单位时间内沿法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向流过 $\mathrm{d}S_t$ 的热量由

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathrm{d}S_t$$

给出. 因此, 单位时间内通过 S_t 流入 G_t 的热量为

$$-\int_{S_t} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathrm{d}S_t$$

综合以上诸式, 由能量守恒定律就得到

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{G_t} \frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2 \mathrm{d}y + \int_{G_t} \rho e \mathrm{d}y \right) \\ = & \int_{S_t} (\boldsymbol{T\nu}) \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}y \\ & + \int_{G_t} \rho\gamma \mathrm{d}y - \int_{S_t} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathrm{d}S_t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

利用第五章引理 3.1, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_t} \left(\frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2 + \rho e \right) \mathrm{d}y = \int_{G_t} \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 + e \right) \mathrm{d}y,$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_y)$, 而 $\nabla_y = \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \dfrac{\partial}{\partial y_3} \right)$. 于是, (2.1) 式可改写为

$$\begin{aligned} & \int_{G_t} \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 + e \right) \mathrm{d}y \\ = & \int_{S_t} (\boldsymbol{T\nu}) \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}y \\ & + \int_{G_t} \rho\gamma \mathrm{d}y - \int_{S_t} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathrm{d}S_t. \end{aligned} \tag{2.2}$$

这就是在空间描述下 (见第五章 §1) 能量守恒定律的积分形式.

为了得到 (2.2) 的微分形式, 和第五章中类似, 要将其右端的曲面积分化为该曲面所围区域中的体积分. 设所讨论的被积函数是光滑的, 由格林公式有

$$\int_{S_t}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t = \int_{G_t}\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\mathrm{d}y, \tag{2.3}$$

$$\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t = \int_{G_t}\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}\mathrm{d}y, \tag{2.4}$$

其中 div_y 表示关于 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 的散度. 在得到 (2.3) 式的过程中, 我们还利用了柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的对称性 (见第五章定理 3.2)

利用 (2.3) 和 (2.4) 式, 由 (2.2) 式就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y\\=&\int_{G_t}(\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\gamma)\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.5}$$

因为 (2.5) 式对一切 $G_t\subset\Omega_t$ 均成立, 所以有

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)=\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\gamma. \tag{2.6}$$

这就是在空间描述下能量守恒定律的微分形式.

显然有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}$$

及

$$\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})=\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}+\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial y_j}, \tag{2.7}$$

其中 t_{ij} 为 $\boldsymbol{T}$ 的分量, 而 $\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}=\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j}\right)$ 为一向量 (见附录一). 在得到 (2.7) 式时, 我们再一次利用了 $\boldsymbol{T}$ 的对称性. 这样, 利用第五章得到的动量守恒定律的微分形式 (见第五章 (3.27) 式)

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}-\rho\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}, \tag{2.8}$$

(2.6) 又可改写为如下较简单的形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial y_j}-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\gamma \tag{2.9}$$

这是在空间描述下能量守恒定律微分形式的另一种表示方式.

如同在弹性力学中那样, 在热弹性力学中最常用的也是上述诸方程在物质描述下 (见第五章 §1) 的形式. 设参考构形中的区域 $G_0\subset\Omega$ 对应于 $G_t\subset\Omega_t$. 为了得到在物质描述下的能量守恒方程, 我们要将 (2.2) 式中在 G_t 上关于变量 (y_1,y_2,y_3) 的体积分化为在 G_0 上关于变量 (x_1,x_2,x_3) 的体积分, 并将在 S_t 上的曲面积分化为在 G_0 的边界 S_0 上的曲面积分. 对于前者, 只要利用通常的积分变量代换, 并注意到

$$\rho J=\rho_0 \tag{2.10}$$

(见第五章 (3.4) 式) 即可做到, 其中 $J=\det\boldsymbol{F}$, 且 $\boldsymbol{F}=(f_{ij})$, $f_{ij}=\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 而 ρ_0 则表示热弹性体变形前的质量密度 (仅依赖于 x, 而与 t 无关). 例如

$$\begin{aligned}&\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{G_0}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)J\mathrm{d}x\\
=&\int_{G_0}\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.11}$$

类似地, 有

$$\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y=\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \tag{2.12}$$

$$\int_{G_t}\rho\gamma\mathrm{d}y=\int_{G_0}\rho_0\gamma\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

现考察 (2.2) 式中在 S_t 上的曲面积分的相应变化. 注意到

$$\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0, \tag{2.14}$$

(见第五章引理 3.2 中的 (3 33) 式), 其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 为 S_0 的单位外法线向量, 并利用 $\boldsymbol{T}$ 的对称性, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{S_t}(\boldsymbol{T\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t &= \int_{S_t}(\boldsymbol{Tv})\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t\\ &= \int_{S_0}J(\boldsymbol{Tv})\cdot(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_0\\ &= \int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0,\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中 p_{ij} 为彼奥拉应力张量

$$\boldsymbol{P}=J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\tag{2.16}$$

(见第五章 (3.39) 式) 的分量. 类似地, 易知有

$$\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0,\tag{2.17}$$

其中

$$\boldsymbol{h}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}.\tag{2.18}$$

不难看出, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}$ 表示单位时间内沿 $\boldsymbol{\nu}$ 方向流过 S_t 上单位面积的热量, 而 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$ 则是以未变形的 (即 S_0 上的) 单位面积来度量的单位时间内的热流量. 将 (2 11)—(2.13), (2.15) 及 (2.17) 诸式代入 (2.2) 式, 就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x\\ =\ &\int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0+\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\\ &+\int_{G_0}\rho_0\gamma\mathrm{d}x-\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

这就是物质描述下能量守恒定律的积分形式.

为了得到 (2 19) 的微分形式, 在被积函数为光滑的条件下, 利用格林公式将其右端的曲面积分化为 G_0 中的体积分:

$$\int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0 = \int_{G_0}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)\mathrm{d}x,\tag{2.20}$$

$$\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0 = \int_{G_0}\mathrm{div}\boldsymbol{h}\mathrm{d}x,\tag{2.21}$$

其中 div 表示关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的散度. 将 (2.20) 与 (2.21) 式代入 (2.19) 式, 就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x\\ =\ &\int_{G_0}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho_0\gamma\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.22}$$

由于 (2.22) 式对任何给定的区域 $G_0\subset\Omega$ 均成立, 应有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\\ =\ &\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho_0\gamma.\end{aligned} \tag{2.23}$$

这就是在物质描述下能量守恒定律的微分形式. 它是一个散度形式的守恒律方程.

利用第五章所得的动量守恒方程组

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+\rho_0 b_i\quad(i=1,2,3) \tag{2.24}$$

(见第五章 (3.44) 式), 容易看出, (2.23) 式又可写为如下较为简单的等价形式:

$$\rho_0\frac{\partial e}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\gamma. \tag{2.25}$$

这是物质描述下能量守恒定律的另一种表示方式.

2.2. 熵不等式

设 η 为熵密度, 即单位质量的熵. 现考察任一给定区域 $G_t\subset\Omega_t$ 中熵的变化. 由热力学第二定律 (见附录二) 知: 单位时间内 G_t 中熵的增加量不小于这段时间内由 G_t 中的熵源供给的熵与由 G_t 的边界 S_t 流入 G_t 中的熵之和.

G_t 中的总熵为

$$\int_{G_t}\rho\eta\mathrm{d}y.$$

G_t 中的熵源就是其热源. 已知 G_t 中的体积微元 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3$ 在单位时间内产生的热量为 $\rho\gamma\mathrm{d}y$. 这些热量所供给的熵为 $\rho\gamma\mathrm{d}y/\theta$, 其中 θ 为微元 $\mathrm{d}y$ 的绝对温度 (见附录二中的 (4) 式). 于是, G_t 中的熵源在单位时间内供给的熵为

$$\int_{G_t}\frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y.$$

此外, 已知在单位时间内从边界面积微元 $\mathrm{d}S_t$ 流入 G_t 的热量为 $-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t$, 所以流入的熵为 $-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t/\theta$ 这样, 单位时间内由 S_t 流入 G_t 的熵为

$$-\int_{S_t}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t.$$

综合以上分析, 由热力学第二定律得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_t}\rho\eta\mathrm{d}y\geqslant\int_{G_t}\frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y-\int_{S_t}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t. \tag{2.26}$$

对上式左端利用第五章引理 3.1, 就可将 (2.26) 式改写为

$$\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y\geqslant\int_{G_t}\frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y-\int_{S_t}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t. \tag{2.27}$$

这就是在空间描述下熵不等式的积分形式.

在被积函数为光滑的条件下, 利用格林公式将 (2.27) 式右端的曲面积分化为在 G_t 中的体积分, 就可将 (2.27) 式写为如下形式:

$$\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y\geqslant\int_{G_t}\left(\frac{\rho\gamma}{\theta}-\mathrm{div}_y\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right)\right)\mathrm{d}y. \tag{2.28}$$

由于 (2.28) 式对任何给定的区域 $G_t\subset\Omega_t$ 均成立, 就有

$$\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\geqslant\frac{\rho\gamma}{\theta}-\mathrm{div}_y\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right). \tag{2.29}$$

这就是在空间描述下熵不等式的微分形式.

为了得到物质描述下的熵不等式, 要将 (2.27) 式中的体积分及曲面积分分别化为 G_0 上的体积分及 S_0 上的曲面积分. 类似于对能量守恒方程所作的那样, 就可将 (2.27) 式化为

$$\int_{G_0}\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial t}\mathrm{d}x\geqslant\int_{G_0}\frac{\rho_0\gamma}{\theta}\mathrm{d}x-\int_{S_0}\frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}}{\theta}\mathrm{d}S_0, \tag{2.30}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 由 (2.18) 式定义 这就是物质描述下熵不等式的积分形式

利用格林公式将 (2 30) 式右端在 S_0 上的曲面积分化为 G_0 上的体积分，(2.30) 式又可改写为

$$\int_{G_0} \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathrm{d}x \geqslant \int_{G_0} \left(\frac{\rho_0 \gamma}{\theta} - \operatorname{div} \left(\frac{\boldsymbol{h}}{\theta} \right) \right) \mathrm{d}x. \tag{2.31}$$

由于 (2.31) 式对任何给定的区域 $G_0 \subset \Omega$ 均成立，就有

$$\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \geqslant \frac{\rho_0 \gamma}{\theta} - \operatorname{div} \left(\frac{\boldsymbol{h}}{\theta} \right). \tag{2 32}$$

这就是物质描述下热力学第二定律的微分形式 —— 熵不等式，也称*克劳修斯–杜海姆* (Clausius–Duhem) 不等式.

§3. 热弹性力学的本构关系

3.1. 本构关系 自由能

对于热弹性体，体积力密度 $\boldsymbol{b}$ 及热源密度 γ 是作为已知量给出的. 但根据 §1 中对热弹性体特性的描述，柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ (从而彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$)、内能密度 e、热流密度向量 $\boldsymbol{q}$ (从而 $\boldsymbol{h}$) 以及熵密度 η 则应表示为变形 (由变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 刻画)、绝对温度 θ 以及温度梯度 $\nabla\theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right)$ 的函数，即

$$\boldsymbol{T} = \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta, \nabla\theta), \tag{3.1}$$

$$e = \widehat{e}(\boldsymbol{F}, \theta, \nabla\theta), \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{q} = \widehat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \nabla\theta), \tag{3 3}$$

$$\eta = \widehat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta, \nabla\theta) \tag{3.4}$$

以上这些关系式称为热弹性体的*本构关系*或*本构方程*. 上述本构方程中的函数 $\widehat{\boldsymbol{T}}$, $\widehat{e}$, $\widehat{\boldsymbol{q}}$ 和 $\widehat{\eta}$ 的具体形式，则完全由所讨论的材料确定. 在本构方程 (3.1)–(3.4) 中，右端的函数 $\widehat{\boldsymbol{T}}$、$\widehat{e}$、$\widehat{\boldsymbol{q}}$ 及 $\widehat{\eta}$ 不明显地依赖于 $\boldsymbol{x}$，这种材料称为*齐次的*；反之则称为*非齐次的*. 虽然下面绝大部分的讨论内容原则上对非齐次的热弹性材料仍然成立，但为叙述简单起见，以下均假定所讨论的材料是齐次的.

在第五章讨论弹性力学时，本构关系除了用应力作为变形梯度的函数来表示外，还可以利用贮能函数 $W=\widehat{W}(\boldsymbol{F})$ 给出超弹性材料的本构关系．在导出热弹性体的能量守恒方程时，我们用内能密度 e（实际上是用 ρe）代替了贮能函数 W．那么，对热弹性材料而言，是否可以仅仅用给出内能密度 e 的方式得到本构关系呢？通过仔细的考察可以发现，这种想法起码是不完全的．事实上，在热弹性体的内能中包含了热能．热力学告诉我们，热能是不可能全部转化为机械功的；而只有作机械功的那一部分能量才能使热弹性体产生变形．由热力学知（见附录 2）在温度不变的情况下，亥姆霍兹自由能是介质作机械功能力的一个量度．因此，代替内能密度 e，我们可以选取单位质量的亥姆霍兹自由能

$$\psi=e-\theta\eta \tag{3.5}$$

来给出本构关系．虽然在这里 e 并不仅仅表示热力学内能，但由于应变能是可以完全转化为机械功的，所以上述亥姆霍兹自由能仍可作为（在温度不变时）介质作机械功能力的一个量度．

下面我们说明：若给出亥姆霍兹自由能的本构方程

$$\psi=\widehat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.6}$$

就可由它导出本构关系中关于 $\boldsymbol{P}$（从而 $\boldsymbol{T}$）、η 以及 e 的方程．

将 $e=\psi+\theta\eta$ 代入能量守恒方程 (2.25)，并注意到 $v_i=\dfrac{\partial y_i}{\partial t}$ 及 $f_{ij}=\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$，可得

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}+\rho_0\eta\frac{\partial\theta}{\partial t}+\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial t}\\=\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}-\operatorname{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\gamma.\end{aligned} \tag{3.7}$$

而将 (3.6) 式关于 t 求导，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}=&\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial f_{ij}}\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\\&+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial(\frac{\partial\theta}{\partial x_k})}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

从 (3.7) 与 (3.8) 两式中消去 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, 得到

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left(p_{ij}-\rho_0\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial f_{ij}}\right)\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}-\rho_0\left(\eta+\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial t}$$
$$-\rho_0\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial(\frac{\partial \theta}{\partial x_k})}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right)+\rho_0\left(\gamma-\theta\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}=0. \tag{3.9}$$

(3.9) 式对一切 $\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}$、$\frac{\partial \theta}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right)$ 均应成立，故相应的系数均应为零. 这样，便有

$$p_{ij}=\rho_0\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial f_{ij}}, \tag{3.10}$$

$$\eta=-\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial(\frac{\partial \theta}{\partial x_k})}=0 \tag{3.12}$$

及

$$\rho_0\left(\gamma-\theta\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}=0. \tag{3.13}$$

(3.10) 和 (3.11) 式就是由自由能函数 $\hat{\psi}$ 给出的关于彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 和熵密度 η 的本构方程. 从而，e 的本构方程可由 $e=\psi+\theta\eta$ 及 (3.6) 与 (3.11) 式得出. 而 (3.12) 式说明自由能函数 $\hat{\psi}$ 与温度梯度 $\nabla\theta$ 无关，即 $\hat{\psi}$ 只是 $\boldsymbol{F}$ 和 θ 的函数. 这样，彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 和熵密度 η 及内能密度 e 也与温度梯度 $\nabla\theta$ 无关，而只依赖于 $\boldsymbol{F}$ 与 θ. (3.13) 式是描述热传导现象的方程，它实际上是能量守恒方程的另一种形式.

由以上的讨论可见，在热弹性体的本构关系中，只要给出关于自由能 ψ 和热流密度向量 $\boldsymbol{q}$ 的本构方程就够了. 此外，关于自由能 ψ 的本构方程必具有以下形式:

$$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta). \tag{3.14}$$

当然, 热弹性力学的本构关系也应满足客观性假设 (见第五章 §4). 亥姆霍兹自由能 ψ 是标量, 与贮能函数 W 一样, 其客观性假设具有如下的形式:

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{QF},\theta)=\hat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta) \tag{3.15}$$

对任意给定的正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 成立 (参见第五章 (4.19) 式). 关于热流密度向量 $\boldsymbol{q}$ 的本构关系 (3.3) 式的客观性假设, 此处从略.

利用极分解定理 (见第五章引理 2.1), $\boldsymbol{F}$ 可以表示为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}$ 的形式, 其中 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵, 而 $\boldsymbol{U}$ 为对称正定阵. 在 (3.15) 式中取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, 即有

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta)=\hat{\psi}(\boldsymbol{U},\theta)=\bar{\psi}(\boldsymbol{C},\theta), \tag{3.16}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}^2$ 为右柯西—格林应变张量, 而 $\bar{\psi}(\boldsymbol{C},\theta)=\hat{\psi}(\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}},\theta)$. 这说明: 亥姆霍兹自由能 ψ 实际上只是右柯西—格林应变张量 $\boldsymbol{C}$ 与绝对温度 θ 的函数. 利用 (3.10) 及 (3.16) 式不难直接验证, 彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 可表示为如下形式:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C},\theta), \tag{3.17}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 为一个只依赖于 $\boldsymbol{C}$ 与 θ 的二阶张量函数. (3.17) 式也可以像第五章中的 (4.15) 式那样, 由柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的表达式得到.

此外, 若亥姆霍兹自由能和热流密度向量的本构关系 (3.14) 及 (3.3) 式满足

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{FQ},\theta)=\hat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta), \tag{3.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{FQ},\theta,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\nabla\theta)=\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.19}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任意给定的正交阵, 则称热弹性材料为*各向同性*的, 否则称为*各向异性*的.

3.2. 热传导的方向性

下面我们利用熵不等式 (2.32) 讨论热传导的方向性.

由 (3.13) 式, 熵不等式 (2.32) 可改写为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{h}-\theta\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\theta}\right)\leqslant 0. \tag{3.20}$$

注意到 $\mathrm{div}\left(\dfrac{\boldsymbol{h}}{\theta}\right)=\dfrac{1}{\theta}\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$ 及 $\nabla\left(\dfrac{1}{\theta}\right)=-\dfrac{1}{\theta^2}\nabla\theta$, 上式给出

$$\boldsymbol{h}\cdot\nabla\theta\leqslant 0. \tag{3.21}$$

这是熵不等式的另一种表示方式. 它刻画出热力学第二定律对热传导方向的限制: 热流方向与温度梯度负向的夹角不超过 $\pi/2$. 这与直观上的热传导现象是一致的: 热量总是由温度高的地方流向温度低的地方. 事实上, 热弹性体中真正的热流方向是 $\boldsymbol{q}$, 而 $\nabla_y\theta$ 则是热弹性体在变形后的温度梯度. 但由 $\boldsymbol{h}$ 的定义 (2.18) 式, 并注意到 $\nabla\theta=(\nabla_y\theta)\boldsymbol{F}$ 及 $J>0$, 易知 (3.21) 式与下式等价:

$$\boldsymbol{q}\cdot\nabla_y\theta\leqslant 0. \tag{3.22}$$

这个不等式亦可由在空间描述下的能量守恒方程 (2.9) 和熵不等式 (2.29) 导出 (见习题 2).

此外, 由 $\boldsymbol{h}$ 的定义 (2.18) 式及 $\boldsymbol{q}$ 的本构方程 (3.3) 式, 可设

$$\boldsymbol{h}=\widehat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta). \tag{3.23}$$

这样, 由 (3.21) 式还可得到

$$\widehat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},\theta,0)=\boldsymbol{0} \tag{3.24}$$

对任意给定的 $\boldsymbol{F}$ 及 θ 均成立. 事实上, 对任意给定的实数 λ, 记

$$f(\lambda)=\widehat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},\theta,\lambda\nabla\theta)\cdot\nabla\theta.$$

由 (3.21) 式有

$$\lambda f(\lambda)\leqslant 0,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}. \tag{3.25}$$

这说明, $f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处变号, 从而 $f(0)=0$, 即

$$\widehat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},\theta,0)\cdot\nabla\theta=0.$$

由于上式对任意给定的 $\nabla\theta$ 均应成立, 就得到 (3.24) 式.

3.3. 线性热弹性

设参考构形在某一个常数温度 $\theta = \theta_0\ (>0)$ 时处于自然状态，即成立

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}, \theta_0) = \boldsymbol{0}, \tag{3.26}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 为 (3.1) 式右端的张量函数．现考察热弹性体在自然状态附近的微小变形和微小温度变化．下面恒假定

$$|\nabla \boldsymbol{u}| \overset{\triangle}{=} \left(\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left|\frac{\Theta}{\theta_0}\right|, |\nabla\theta| \leqslant \varepsilon \ll 1, \tag{3.27}$$

其中 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$, 而 $\Theta = \theta - \theta_0$.

由 (3.26) 式及 (2.16) 式，有

$$\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{I}, \theta_0) = \boldsymbol{0}, \tag{3.28}$$

这里 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 为 (3.17) 式右端的张量函数．将 $\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C}, \theta)$ 在 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ 及 $\theta = \theta_0$ 的附近展开，并注意到 (3.27)～(3.28) 式，就得到

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}, \theta) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) - \Theta\boldsymbol{G} + O(\varepsilon^2), \tag{3.29}$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl})$ 及 $\boldsymbol{G} = (g_{ij})$ 分别为四阶及二阶张量，其分量为

$$a_{ijkl} = 2\left.\frac{\partial \overline{p}_{ij}}{\partial c_{kl}}\right|_{\substack{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I} \\ \theta=\theta_0}}, \tag{3.30}$$

$$g_{ij} = -\left.\frac{\partial \overline{p}_{ij}}{\partial \theta}\right|_{\substack{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I} \\ \theta=\theta_0}}, \tag{3.31}$$

其中 $\overline{p}_{ij}$ 及 c_{kl} 分别是 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 及 $\boldsymbol{C}$ 的分量；而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$ 则表示分量为

$$\sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}(c_{kl} - \delta_{kl})$$

的二阶张量．已知 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{E} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为无穷小应变张量，其分量 $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ (见第五章 §2.3).
由 (3.17) 与 (3.29) 式，并注意到 (3.27) 式，易得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} - \Theta\boldsymbol{G} + O(\varepsilon^2). \tag{3.32}$$

将熵密度 η 的本构方程 (3.4) 式的右端函数 $\hat{\eta}$ (由 (3.11) 及 (3.14) 式，$\hat{\eta}$ 不依赖于 $\nabla\theta$) 在 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$ 及 $\theta=\theta_0$ 的附近展开，有

$$\begin{aligned}\eta = &\ \hat{\eta}(\boldsymbol{I},\theta_0)+\hat{\eta}_F(\boldsymbol{I},\theta_0)\cdot(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})\\ &+\hat{\eta}_\theta(\boldsymbol{I},\theta_0)\Theta+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $\hat{\eta}_F=\left(\dfrac{\partial\hat{\eta}}{\partial f_{ij}}\right)$，而

$$\hat{\eta}_F(\boldsymbol{I},\theta_0)\cdot(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial f_{ij}}(\boldsymbol{I},\theta_0)(f_{ij}-\delta_{ij}). \tag{3.34}$$

下面为简单起见，并不失一般性，取

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{I},\theta_0)=0 \tag{3.35}$$

热流密度向量 $\boldsymbol{h}$ 的本构方程的右端 (见 (2.18) 与 (3.3) 式) 依赖于 $\boldsymbol{F},\theta$ 及 $\nabla\theta$，将其在 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$，$\theta=\theta_0$ 及 $\nabla\theta=0$ 的附近展开，并注意到 (3.24) 式，就有

$$\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{K}\nabla\theta+O(\varepsilon^2), \tag{3.36}$$

其中 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 为一个二阶常张量.

由 (3.10) 与 (3.11) 式，有

$$\hat{\eta}_F=-\frac{\partial\hat{\psi}_F}{\partial\theta}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{P}}}{\partial\theta}, \tag{3.37}$$

其中 $\hat{\psi}_F=\left(\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial f_{ij}}\right)$，而 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 则为彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 的本构方程的右端函数：$\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F},\theta)$. 将 $\boldsymbol{P}$ 的表达式 (3.32) 代入 (3.37) 式，然后令 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$ 及 $\theta=\theta_0$，即得

$$\hat{\eta}_F(\boldsymbol{I},\theta_0)=\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{G}. \tag{3.38}$$

此外，由 (3.11) 式及 ψ 的定义 (3.5) 式，有

$$\hat{\eta}=\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}=\frac{\partial\hat{e}}{\partial\theta}-\hat{\eta}-\theta\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\theta},$$

因此

$$\hat{\eta}_\theta = \frac{1}{\theta}\hat{e}_\theta \tag{3.39}$$

将 (3.35)、(3.38) 及 (3.39) 式代入 (3.33) 式，就得到

$$\eta = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{G}\cdot(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}) + \frac{1}{\theta_0}\hat{e}_\theta(\boldsymbol{I},\theta_0)\Theta + O(\varepsilon^2). \tag{3.40}$$

在 (3.32)、(3.40) 及 (3.36) 诸式中，忽略掉高阶项即线性化后，我们得到

$$p_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{kl} - g_{ij}\Theta \quad (i,j=1,2,3), \tag{3.41}$$

$$\eta = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{\rho_0}g_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{a}{\rho_0}\Theta \tag{3.42}$$

及

$$h_i = -\sum_{j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j} \quad (i=1,2,3), \tag{3.43}$$

其中 $a = \frac{\rho_0}{\theta_0}\hat{e}_\theta(\boldsymbol{I},\theta_0)$. 如同纯弹性的情况那样，四阶张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 具有以下的对称性：

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{ijlk} = a_{jikl} \tag{3.44}$$

(见第五章 (4.59) 式). 由于在线性化后 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 相同，从而亦具有对称性，出现在 (3.41) 式右端的二阶张量 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 也是对称的：

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (i,j=1,2,3). \tag{3.45}$$

此外，通常在物理上又可以假定

$$\hat{e}_\theta(\boldsymbol{I},\theta_0) > 0, \tag{3.46}$$

因此 $a>0$.

(3.41)、(3.42) 及 (3.43) 式就是线性热弹性力学的本构关系. (3.43) 式是关于热传导的傅里叶实验定律的更一般的形式，其中 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 称热传导张量或热传导矩阵.

由热力学第二定律可导出对热传导张量 $\boldsymbol{K}$ 的限制条件. 将 (3.43) 代入 (3.21) 式, 就有

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \geqslant 0. \tag{3.47}$$

这说明热传导矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是半正定的, 即 $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ 是半正定对称矩阵.

对等温的情况: $\Theta=0$, 线性热弹性即化为依赖于常温度参数 θ_0 的纯弹性问题. 此时, 本构方程 (3.41) 就化为广义胡克定律 (见第五章 (4.58) 式):

$$p_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl} e_{kl} \tag{3.48}$$

因此, 若材料是各向同性的, 本构方程 (3.41) 右端的第一项应具有如下形式:

$$\sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl} e_{kl} = \lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \tag{3.49}$$

其中 λ 及 μ 为拉梅常数 (见第五章 (4.60) 式).

对全约束 (即 $e_{ij}=0,\ i,j=1,2,3$) 的情况, 本构方程 (3.41) 化为

$$p_{ij} = -g_{ij}\Theta \quad (i,j=1,2,3). \tag{3.50}$$

因此, 对各向同性材料, $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 应是各向同性的二阶张量. 由各向同性二阶张量的一般形式 (见附录一), 有

$$g_{ij} = \beta\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \tag{3.51}$$

其中 β 为一标量.

此外, 对各向同性材料, 热传导张量 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 也应是各向同性的二阶张量, 从而应具有以下形式:

$$k_{ij} = k\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \tag{3.52}$$

其中 $k>0$ 为一标量.

综合 (3.49) 、 (3.51) 及 (3.52) 诸式，对各向同性材料，线性热弹性力学的本构方程 (3.41) 、 (3.42) 及 (3.43) 应具有以下形式：

$$p_{ij} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \beta\Theta\delta_{ij}$$
$$(i, j = 1, 2, 3) \tag{3.53}$$

或

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}p_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(p_{11} + p_{22} + p_{33})\delta_{ij} + \alpha\Theta\delta_{ij}$$
$$(i, j = 1, 2, 3), \tag{3.54}$$

$$\eta = \frac{\beta}{\rho_0}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + \frac{a}{\rho_0}\Theta \tag{3.55}$$

和

$$h_i = -k\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.56}$$

其中 $\alpha = \dfrac{\beta}{3\lambda + 2\mu}$. (3.56) 式就是通常关于热传导的傅里叶实验定律.

由 (3.54) 式可见，α 表示在应力不变的情况下，温度升高 1 度所引起的正应变的增量，称其为线膨胀系数. 绝大部分热弹性材料是热胀冷缩的 (但也有例外，例如橡胶)；对这类材料，线膨胀系数是正的，即 $\alpha > 0$. 由第五章 §4, 拉梅常数 λ 及 μ 应满足 $\kappa = \lambda + \dfrac{2}{3}\mu > 0$. 因此，在 $\alpha > 0$ 时，出现在 (3.53) 式右端的 β 也是正常数： $\beta > 0$.

§4. 热弹性动力学方程组及其数学结构

4.1. 线性热弹性动力学方程组

将线性热弹性力学的本构方程 (3.41) 代入动量守恒方程组 (2.24), 并利用 (3.44) 式，我们得到

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}$$
$$- \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.1}$$

将本构方程 (3.42) 及 (3.43) 代入能量守恒方程 (3.13), 有

$$a\theta\frac{\partial\Theta}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}+\theta\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}=\rho_0\gamma \tag{4.2}$$

这仍是一个非线性方程, 忽略掉其中的高阶小量, 即以 θ_0 代替出现在方程左端第一及第三项中的 θ, 即得到如下的线性方程:

$$a\theta_0\frac{\partial\Theta}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}+\theta_0\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}=\rho_0\gamma. \tag{4.3}$$

方程组 (4.1) 及 (4.3) 就构成*线性热弹性动力学方程组*. 它是一个含有四个未知函数 (u_1, u_2, u_3, Θ) 的封闭的二阶线性偏微分方程组. 这里还需说明的是, 在上节推得线性热弹性力学的本构关系 (3.41)—(3.43) 的过程中, 只假定了 $|\nabla\boldsymbol{u}|$, $|\Theta|$ 及 $|\nabla\theta|$ 是小量 (见 (3.27) 式); 但在讨论动力学问题, 导出方程 (4.3) 时, 我们实际上还假定了 $\left|\nabla\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|$ 与 $\left|\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right|$ 也是小量.

下面讨论这个方程组的数学结构. 假定弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (见第五章定义 5.1), 即存在常数 $\alpha>0$ 使

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l\geqslant\alpha|\boldsymbol{\xi}|^2|\boldsymbol{\eta}|^2,\quad\forall\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3. \tag{4.4}$$

这样, 方程组 (4.1) 关于未知函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 为双曲型. 对出现在方程 (4.3) 中的热传导矩阵 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$, 我们还假设它是正定的, 即存在常数 $k>0$ 使

$$\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant k|\boldsymbol{\xi}|^2,\forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3. \tag{4.5}$$

这一要求较上节得到的半正定性 (见 (3.47) 式) 略强, 但对许多常见的热弹性材料的传热过程, 这个假设还是合理的. 在 (4.5) 式满足的条件下, 方程 (4.3) 关于未知函数 Θ 为抛物型.

方程组 (4.1) 关于未知函数 (u_1,u_2,u_3) 为双曲型, 而方程 (4.3) 关于未知函数 Θ 为抛物型, 由它们组成的方程组 (4.1) 及 (4.3) 为二

阶线性双曲—抛物耦合方程组. 双曲—抛物耦合方程组, 我们在第二章讨论粘性热传导流体动力学方程组时已经碰到过, 但那时的双曲组是一阶对称双曲组, 而不是这儿的二阶双曲组. 现在这种双曲—抛物耦合方程组的定解条件, 可对未知函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 与 Θ 分别按二阶双曲型方程组与二阶抛物型方程的要求给出.

线性热弹性动力学方程组 (4.1) 及 (4.3) 的定解问题也可分初值问题 (柯西问题) 与混合初—边值问题两大类. 其提法分别如下:

初值问题 在 $t>0, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ 中求方程组 (4.1) 及 (4.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 与 Θ, 使其在 $t=0$ 时满足初始条件

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\\
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x}),\\
\Theta(0,\boldsymbol{x}) &= \Theta^0(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

其中 $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x})$ 与 $\Theta^0(\boldsymbol{x})$ 为给定的函数.

混合初–边值问题 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域, 在 $t>0, \boldsymbol{x}\in\Omega$ 中求方程组 (4.1) 及 (4.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 与 Θ, 使其在 $t=0$ 时满足形如 (4.6) 的初始条件, 并在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足如下的边界条件:

$$
\boldsymbol{u}|_{\Gamma_1}=\boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_2}=\boldsymbol{\sigma}, \tag{4.7}
$$

$$
\Theta|_{S_1}=f, \qquad \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}|_{S_2}=g, \tag{4.8}
$$

其中 $\Gamma_1\cup\Gamma_2=S_1\cup S_2=\partial\Omega$, 且 $\Gamma_1\cap\Gamma_2=S_1\cap S_2=\emptyset$, $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{h}$ 分别由 (3.41) 及 (3.43) 式给出, 而 $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\sigma}, f$ 及 g 均为已给函数.

边界条件 (4.7) 表示在边界 $\partial\Omega$ 的一部分 Γ_1 上给定热弹性体的位移, 而在另一部分 Γ_2 上给定应力 (Γ_1 或 Γ_2 可以是空集, 这时 (4.7) 就只给一组边界条件). 边界条件 (4.8) 则表示在边界 $\partial\Omega$ 的一部分 S_1 上给定热弹性体的温度, 而在另一部分 S_2 上给定热流量 (S_1 或 S_2 也可以是空集).

对上述线性热弹性动力学方程组定解问题解的存在唯一性问题, 处理起来并没有大的困难. 例如, 解的存在性可以用算子半群的方法处理. 但关于这些问题的解在 $t\to+\infty$ 时的渐近性态, 至今仍是一个引起人们兴趣的问题.

热的传导具有一种耗散机制. 在热弹性力学中, 由于考虑了热效应, 其定解问题的解应具有某种耗散性质.

为简单计，设 $\boldsymbol{b}\equiv\mathbf{0}$、$\gamma=0$, 并以如下的齐次边界条件

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0},\quad \Theta|_{\partial\Omega}=0 \tag{4.9}$$

为例，对方程组 (4.1) 及 (4.3) 的解在 $t\to+\infty$ 时的渐近性态作一个粗略的考察.

以 $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ 乘方程 (4.1) 的两端，且对 i 从 1 到 3 求和，再以 $\dfrac{\Theta}{\theta_0}$ 乘方程 (4.3) 的两端，并将所得的结果相加后在 Ω 上积分，利用格林公式和边界条件 (4.9), 就可得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{2}\left(\rho_0\left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2+\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+a\Theta^2\right)\mathrm{d}x\\ =&-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^3\frac{1}{\theta_0}k_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.10}$$

于是，若热传导矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是正定的，即条件 (4.5) 满足，就有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{2}\left(\rho_0\left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2+\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+a\Theta^2\right)\mathrm{d}x\\ \leqslant&-\frac{k}{\theta_0}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.11}$$

若弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 还满足稳定性条件，即存在正常数 $\tilde{\alpha}$, 使得

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\geqslant\tilde{\alpha}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{4.12}$$

对一切二阶对称阵 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})$ 成立 (见第五章定义 5.2), 则由柯恩不等式 (见第五章定理 6.1) 就有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\mathrm{d}x\\ \geqslant&\ \tilde{\alpha}C_0\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\sum_{i,j=1}^3\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

再注意到

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}, \tag{4.14}$$

就可知积分

$$L(t) = \int_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\rho_0\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2 + \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + a\Theta^2\right)\mathrm{d}x$$

是正定的，通常称其为能量积分. (4.11) 式说明：随着时间 t 的增加，能量积分 $L(t)$ 是衰减的. 对能量积分的衰减特性有许多更深入的工作. 例如在一维情况，可以证明：能量积分在 $t \to +\infty$ 时衰减到零 (见 [4]), 进而还可以证明其指数衰减性.

还要指出，方程 (4.1) 中 $\dfrac{\partial \Theta}{\partial x_j}$ 的系数与方程 (4.3) 中 $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}$ 的系数均为 g_{ij} (仅相差一个常数因子 θ_0), 这为这两个方程耦合的有效性提供了一个保证.

4.2. 非线性热弹性动力学方程组

将本构方程

$$\boldsymbol{P} = \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F},\theta) = (\widehat{p}_{ij}(\boldsymbol{F},\theta)) \tag{4.15}$$

代入动量守恒方程 (2.24), 并注意到 $\boldsymbol{F} = (f_{ij})$, 而 $f_{ij} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 就有

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} - \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(\nabla \boldsymbol{y},\theta)\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j\partial x_l} \\ \sum_{j=1}^{3} g_{ij}(\nabla \boldsymbol{y},\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \rho_0 b_i \\ (i=1,2,3),\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中

$$a_{ijkl}(\nabla \boldsymbol{y},\theta) = \frac{\partial \widehat{p}_{ij}}{\partial f_{kl}} \tag{4.17}$$

及

$$g_{ij}(\nabla \boldsymbol{y},\theta) = -\frac{\partial \widehat{p}_{ij}}{\partial \theta}. \tag{4.18}$$

将本构方程

$$\eta = \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta), \quad \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F}, \theta, \nabla\theta) \tag{4.19}$$

代入能量守恒方程 (3.13), 并注意到由 (3.10)、(3.11) 及 (4.18) 式有

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial f_{ij}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial f_{ij} \partial \theta} = -\frac{\partial \hat{p}_{ij}}{\partial \theta} = g_{ij}, \tag{4.20}$$

就得到

$$\begin{aligned}
&\rho_0 \theta c(\nabla \boldsymbol{y}, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}(\nabla \boldsymbol{y}, \theta, \nabla\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\
&- \sum_{i,j,k=1}^{3} k_{ijk}(\nabla \boldsymbol{y}, \theta, \nabla\theta) \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{3} \theta g_{ij}(\nabla \boldsymbol{y}, \theta) \frac{\partial^2 y_i}{\partial t \partial x_j} \\
&- \sum_{i=1}^{3} k_i(\nabla \boldsymbol{y}, \theta, \nabla\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \rho_0 \gamma,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中

$$c(\nabla \boldsymbol{y}, \theta) = \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \theta} > 0 \tag{4.22}$$

及

$$k_{ijk} = \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial f_{jk}}, \quad k_{ij} = -\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial (\frac{\partial \theta}{\partial x_j})}, \quad k_i = -\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \theta}. \tag{4.23}$$

(4.22) 式实际上是一个假定. 注意到 (3.39) 式, (4.22) 式等价于 $\hat{e}_\theta > 0$. 在物理上总假定这一条件成立 (见 (3.46) 式).

(4.16) 及 (4.21) 就构成了非线性热弹性动力学方程组. 其中, 由 (4.17)、(4.18) 定义的 a_{ijkl} 与 g_{ij} 通称为弹性率, 而由 (4.23) 式定义的 k_{ijk}, k_{ij} 及 k_i 则称为热传导率.

我们也称 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl}(\nabla \boldsymbol{y}, \theta))$ 为弹性张量. 由 (4.17) 式及 (3.10) 式, 易见张量 $\boldsymbol{A}$ 具有以下的对称性:

$$a_{ijkl} = a_{klij}. \tag{4.24}$$

此外，我们还假定张量 $\boldsymbol{A}$ 满足强椭圆性条件 (见第五章定义 5.3)，即成立

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(\boldsymbol{F},\theta)\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l > 0,$$
$$\forall \boldsymbol{F}\in \mathbb{R}^{3\times 3}, \det \boldsymbol{F} > 0, \theta > 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}. \tag{4.25}$$

下面考察热传导张量 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 应满足的条件. 注意到 (3.24) 式，由不等式 (3.21) 易知有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}\cdot\nabla\theta &= \sum_{i=1}^{3}(\widehat{h}_i(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta)-\widehat{h}_i(\boldsymbol{F},\theta,\boldsymbol{0}))\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\\ &= \int_0^1\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\widehat{h}_i}{\partial(\frac{\partial\theta}{\partial x_j})}(\boldsymbol{F},\theta,\tau\nabla\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\mathrm{d}\tau\\ &= -\int_0^1\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}(\boldsymbol{F},\theta,\tau\nabla\theta)\mathrm{d}\tau\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\leqslant 0\end{aligned} \tag{4.26}$$

据此，我们可以假定张量 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 是正定的，即成立

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta)\xi_i\xi_j > 0,$$
$$\forall \boldsymbol{F}\in \mathbb{R}^{3\times 3}, \det \boldsymbol{F} > 0, \theta > 0, \nabla\theta\in\mathbb{R}^3, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\} \tag{4.27}$$

在强椭圆性条件 (4.25) 成立的假定下，方程组 (4.16) 关于未知函数 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 是一个二阶拟线性双曲型方程组；而在假设 (4.27) 成立时，方程 (4.21) 关于未知函数 θ 是一个二阶拟线性抛物型方程. 这样，非线性热弹性动力学方程组 (4.16) 及 (4.21) 是一个二阶拟线性双曲–抛物耦合方程组. 这个方程组的定解问题的提法与线性情况 (见 §4.1) 类似，不再复述. 至于这些定解问题的特点及有关的研究情况，在下节讨论加速度波时再予说明.

在许多情况下，尤其是在研究间断解时，宜于将方程组写为守恒律的形式. 为此目的，代替 (3.13) 式，我们用守恒律形式的方程 (2.23) 来表示能量守恒定律；而对动量守恒方程组 (2.24)，可通过引进新的未

知函数

$$f_{ij}=\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\quad(i,j=1,2,3),\quad v_i=\frac{\partial y_i}{\partial t}\quad(i=1,2,3),\tag{4.28}$$

将其写为一个守恒律形式的一阶偏微分方程组. 这样, 非线性热弹性动力学方程组就可以写为如下守恒律形式的方程组:

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=0\quad(i,j=1,2,3),\tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v_k)=\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l}+\rho_0 b_k\quad(k=1,2,3),\tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)=&\operatorname{div}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})-\operatorname{div}\boldsymbol{h}\\&+\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho_0\gamma\end{aligned}\tag{4.31}$$

前两个方程组 (4.29) 及 (4.30) 关于未知函数 $(f_{11}, f_{12},\cdots,f_{33},v_1,v_2,v_3)$ 是一个一阶拟线性 (非严格、非对称) 双曲型方程组 (见第五章 §5.3), 而 (4.31) (它等价于 (3.13) 式) 则本质上是一个拟线性抛物型方程. 因此, (4.29)—(4.31) 仍是一个拟线性双曲—抛物耦合方程组.

4.3. 一维非线性热弹性动力学方程组

现在, 我们讨论两类一维非线性热弹性动力学问题.

1°. 热弹性杆的纯轴向变形

假定热弹性杆的变形为

$$y_1=x_1+u(t,x_1),\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3.\tag{4.32}$$

又假定在同一时刻, 杆的任一横截面上各点的温度均相同, 即温度分布只依赖于 t 及 x_1:

$$\theta=\theta(t,x_1).\tag{4.33}$$

对这种变形, 有

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\partial u}{\partial x_1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\tag{4.34}$$

于是，由热弹性力学的本构关系，彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 及向量 $\boldsymbol{h}$ 的分量最终也只是 t 及 x_1 的函数，并分别记为 $p_{ij}(u_{x_1},\theta)$ 及 $h_i(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1})$.

这样，动量守恒方程组 (2.24) 或 (4.16) 的第一个方程就化为

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}(p_{11}(u_{x_1},\theta))+\rho_0 b_1 \tag{4.35}$$

或

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_{1111}(u_{x_1},\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-g_{11}(u_{x_1},\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\rho_0 b_1, \tag{4.36}$$

其中

$$a_{1111}=\frac{\partial p_{11}(u_{x_1},\theta)}{\partial u_{x_1}},\quad g_{11}=-\frac{\partial p_{11}(u_{x_1},\theta)}{\partial\theta}. \tag{4.37}$$

类似地，能量守恒方程 (2.23) 或 (4.21) 可化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0 u_t^2\right)&-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p_{11}(u_{x_1},\theta)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x_1}h_1(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1})=\rho_0 b_1 u_t+\rho_0\gamma\end{aligned} \tag{4.38}$$

或

$$\begin{aligned}\rho_0\theta c(u_{x_1},\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}=&\;k_{11}(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1})\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}-k_{111}(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\\&+\theta g_{11}(u_{x_1},\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_1}+k_1(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1})\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\rho_0\gamma,\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中

$$k_{111}=-\frac{\partial h_1}{\partial u_{x_1}},\quad k_{11}=-\frac{\partial h_1}{\partial\theta_{x_1}},\quad k_1=-\frac{\partial h_1}{\partial\theta}. \tag{4.40}$$

方程 (4.36) (或 (4.35)) 与 (4.39) (或 (4.38)) 的联合就构成相应的一维非线性热弹性动力学方程组.

在强椭圆性条件 (4.25) 中取 $\xi_1=\eta_1=1,\ \xi_2=\xi_3=\eta_2=\eta_3=0$，即得

$$a_{1111}(u_{x_1},\theta)>0. \tag{4.41}$$

类似地，由热传导张量 $\boldsymbol{K}$ 的正定性条件 (4.27) 可得

$$k_{11}(u_{x_1},\theta,\theta_{x_1}) > 0 \tag{4.42}$$

这样，方程 (4.36) 关于 u 是一个一维非线性波动方程，而方程 (4.39) 关于 θ 是一个一维非线性热传导方程. 因此，方程组 (4.36) 及 (4.39) 是一个一维拟线性双曲—抛物耦合方程组.

2°. 热弹性体的纯剪切变形

假定热弹性杆的变形为

$$y_1 = x_1 + u(t,x_2), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 \tag{4.43}$$

又假定在该变形下，热弹性体的温度分布 θ 只是 t 及 x_2 的函数:

$$\theta = \theta(t,x_2) \tag{4.44}$$

对上述变形，有

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

因此，由本构关系给出的 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{h}$ 的分量最终也只是 t 与 x_2 的函数，并分别记为 $p_{ij}(u_{x_2},\theta)$ 与 $h_i(u_{x_2},\theta,\theta_{x_2})$.

这样，动量守恒方程组 (2.24) 或 (4.16) 的第一方程此时化为

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}p_{12}(u_{x_2},\theta) + \rho_0 b_1 \tag{4.46}$$

或

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{1212}(u_{x_2},\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - g_{12}(u_{x_2},\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \rho_0 b_1, \tag{4.47}$$

其中

$$a_{1212} = \frac{\partial p_{12}(u_{x_2},\theta)}{\partial u_{x_2}} > 0, \quad g_{12} = -\frac{\partial p_{12}(u_{x_2},\theta)}{\partial\theta}. \tag{4.48}$$

这里 $a_{1212} > 0$ 是强椭圆性条件 (4.25) 的推论. 此外, 能量守恒方程 (2.23) 或 (4.21) 此时化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e + \frac{1}{2}\rho_0 u_t^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_{12}(u_{x_2}, \theta)u_t\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2}) - \rho_0 b_1 u_t + \rho_0\gamma \tag{4.49}$$

或

$$\rho_0\theta c(u_{x_2}, \theta)\frac{\partial \theta}{\partial t} - k_{22}(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}$$
$$k_{212}(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \theta g_{12}(u_{x_2}, \theta)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2}$$
$$k_2(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \rho_0\gamma, \tag{4.50}$$

其中

$$\begin{aligned} k_{212} &- \frac{\partial h_2(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})}{\partial u_{x_2}}, \\ k_{22} &- -\frac{\partial h_2(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})}{\partial \theta_{x_2}} > 0, \\ k_2 &- -\frac{\partial h_2(u_{x_2}, \theta, \theta_{x_2})}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

这里 $k_{22} > 0$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的正定性假设 (4.27) 的推论.

方程组 (4.47) (或 (4.46)) 及 (4.50) (或 (4.49)) 也是 ·个 一维拟线性双曲 - 抛物耦合方程组

以上在两种不同情况所得的方程组, 形式上完全相同. 因此, 可以统 ·地将一维热弹性动力学方程组写为

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}p(u_x, \theta) = \rho_0 b, \tag{4.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e + \frac{1}{2}\rho_0 u_t^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}(p(u_x, \theta)u_t) + \frac{\partial}{\partial x}h(u_x, \theta, \theta_x) - \rho_0 b u_t + \rho\gamma \tag{4.53}$$

或

$$\rho_0\theta c(u_x,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}+h_{\theta_x}(u_x,\theta,\theta_x)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+h_{u_x}(u_x,\theta,\theta_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$-\theta p_\theta(u_x,\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+h_\theta(u_x,\theta,\theta_x)\frac{\partial\theta}{\partial x}=\rho_0\gamma, \tag{4.54}$$

其中

$$p_{u_x}(u_x,\theta)>0,\quad h_{\theta_x}(u_x,\theta,\theta_x)<0. \tag{4.55}$$

在许多情况下，尤其是在研究间断解时，将方程组 (4.52) 及 (4.53) 中的第一个方程写为一阶守恒律组的形式是方便的. 为此，令

$$v=u_x,\quad w=u_t, \tag{4.56}$$

将方程组 (4.52) 及 (4.53) 写为如下的等价形式：

$$v_t-w_x=0, \tag{4.57}$$

$$\rho_0 w_t-p(v,\theta)_x=\rho_0 b, \tag{4.58}$$

$$\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0 w^2\right)_t-(p(v,\theta)w)_x$$
$$+(h(v,\theta,\theta_x))_x=\rho_0 bw+\rho_0\gamma, \tag{4.59}$$

其中

$$p_v(v,\theta)>0,\quad h_{\theta_x}(v,\theta,\theta_x)<0. \tag{4.60}$$

此外，熵不等式 (2.32) 此时取如下形式：

$$\rho_0\eta_t+\left(\frac{h}{\theta}\right)_x\geqslant\frac{\rho_0\gamma}{\theta}. \tag{4.61}$$

关于方程组 (4.57)–(4.59) 已有相当多的研究工作 (见下节及其中所引的参考文献). 在对其定解问题的整体光滑解的存在性或破裂现象的研究中，加速度波的传播性态将提供重要的启示，对此将在下节中进行讨论

§5. 加速度波的传播

关于加速度波传播情况的讨论，对判断热弹性动力学方程组的定解问题在什么情况下存在整体光滑解，又在什么情况下其光滑解会在有限时间内发生破裂现象，将会提供有益的启发．下面以一维热弹性动力学方程组 (4.52) 及 (4.53) 为例来说明：什么是加速度波？它的传播有什么特点？这些特点对定解问题的研究会有哪些启发？为简单计，假定 $\rho_0 = 1, b = \gamma = 0$

设 Γ 为 (t, x) 平面上的一条曲线：

$$x = x(t). \tag{5.1}$$

若 u 与 θ 在 Γ 外适当光滑，u 与其一阶偏导数以及 θ 在 Γ 上连续，而 u 的二阶偏导数与 θ 的一阶偏导数在 Γ 上具有第一类间断，就称 Γ 为*加速度波*曲线 (加速度 u_{tt} 在其上间断，故名)．

下面证明：θ 的一阶偏导数在加速度波曲线 Γ 上也是连续的．因此，加速度波曲线实际上是一维非线性热弹性动力学方程组解的弱间断线．事实上，由于 θ 为 (t, x) 的连续函数，易知

$$\oint \theta_t \mathrm{d}t + \theta_x \mathrm{d}x = 0 \tag{5.2}$$

对 (t, x) 平面上的任一封闭曲线成立．于是，由第二章 (4.5) 式的导出过程知，在 Γ 上成立

$$[\theta_t] = -V[\theta_x], \tag{5.3}$$

其中 V 为加速度波的传播速度：

$$V(t) = x'(t), \tag{5.4}$$

而 $x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$．这里 $[\cdot]$ 表示越过 Γ 的跃度．同理，将第二章 (4.5) 式用于守恒律方程 (4.53) 的相应积分形式 (见习题 8)，并注意到 e、u_t 及 $p(u_x, \theta)$ 在 Γ 上均为连续，即得

$$[h] = 0. \tag{5.5}$$

再由 (4.55) 的第二式，h 是 θ_x 的严格单调函数，从而

$$[\theta_x] = 0. \tag{5.6}$$

于是由 (5.3) 式又有

$$[\theta_t] = 0. \tag{5.7}$$

这就证明了 θ 的一阶偏导数在 Γ 上的连续性.

下面考察加速度 u_{tt} 在 Γ 上的跃度

$$a(t) = [u_{tt}] \tag{5.8}$$

关于时间 t 的变化情况. 为简单起见，假定加速度波在传入介质之前，热弹性体处于固定的均匀变形及恒温状态，即

$$u = u_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \text{当 } x > x(t) \text{ 时} \tag{5.9}$$

(见图 1)，其中 u_0 及 θ_0 为常数. 根据数理方程知识 (见 [1])，方程 (4.52) 的解的弱间断线 Γ 必是它的特征线，从而 $V = \pm\sqrt{p_{u_x}(0,\theta_0)}$. 假定加速度波由左向右传播，即

$$x'(t) > 0, \tag{5.10}$$

此时就有

$$V = \sqrt{p_{u_x}(0,\theta_0)} \tag{5.11}$$

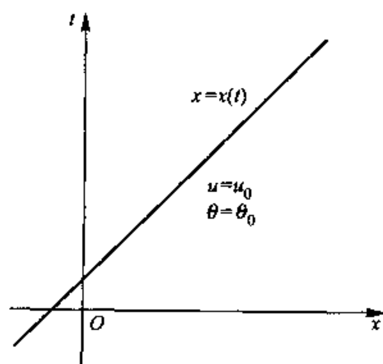


图 1

将方程 (4.52) 关于 t 求导一次，得

$$\begin{aligned} u_{ttt} = & C_1(u_x,\theta)u_{xxt} + C_{11}(u_x,\theta)u_{xx}u_{xt} + C_{12}(u_x,\theta)u_{xx}\theta_t \\ & + C_2(u_x,\theta)\theta_{xt} + C_{12}(u_x,\theta)u_{xt}\theta_x + C_{22}(u_x,\theta)\theta_x\theta_t, \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中

$$\begin{aligned} & C_1 = p_{u_x}, \quad C_2 = p_\theta, \quad C_{11} = p_{u_x u_x}, \\ & C_{12} = p_{u_x\theta}, \quad C_{22} = p_{\theta\theta} \end{aligned} \tag{5.13}$$

因为加速度波是弱间断，且注意到 (5.9) 式，有

$$[u_{xx}u_{xt}] = [u_{xx}][u_{xt}], \quad [u_{xx}\theta_t] = [\theta_{xt}\theta_x] = 0, \tag{5.14}$$

由 (5.12) 式就容易得到

$$\begin{aligned} [u_{ttt}] = & C_1(0,\theta_0)[u_{xxt}] + C_{11}(0,\theta_0)[u_{xx}][u_{xt}] \\ & + C_2(0,\theta_0)[\theta_{xt}]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

将等式

$$[u_x] = 0$$

两端关于 t 求导一次，并注意到 (5.11) 式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_x] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_V t}u_x\right] = [u_{xt}] + V[u_{xx}] = 0,$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_V t} = \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x} \tag{5.16}$$

为沿 Γ 曲线对 t 的方向导数. 这样，就有

$$[u_{xt}] = -V[u_{xx}]. \tag{5.17}$$

类似地，有

$$[u_{tt}] = -V[u_{xt}], \tag{5.18}$$

$$[\theta_{xt}] = -V[\theta_{xx}]. \tag{5.19}$$

由 (5.17) 及 (5.18) 式，我们有

$$[u_{xx}] = \frac{1}{V^2}[u_{tt}] \tag{5.20}$$

$$[u_{xt}] = -\frac{1}{V}[u_{tt}]. \tag{5.21}$$

此外，不难验证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] = \left[\frac{\mathrm{d}u_{tt}}{\mathrm{d}_V t}\right] = [u_{ttt}] + V[u_{xtt}]. \tag{5.22}$$

而将 (5.18) 式关于 t 求导一次，并注意到 (5.11) 式，又有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] &= V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{xt}] = -V\left[\frac{\mathrm{d}u_{xt}}{\mathrm{d}_V t}\right] \\ &= -V[u_{xtt}] - V^2[u_{xxt}].\end{aligned} \tag{5.23}$$

将 (5.22) 与 (5.23) 二式相加，得到

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] = [u_{ttt}] - V^2[u_{xxt}]. \tag{5.24}$$

将 (5.19)—(5.21) 及 (5.24) 式代入 (5.15) 式，并注意到 $C_1(0,\theta_0) = V^2$，即得

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] + \frac{C_{11}(0,\theta_0)}{V^3}[u_{tt}]^2 + VC_2(0,\theta_0)[\theta_{xx}] = 0. \tag{5.25}$$

最后，还需用 $[u_{tt}]$ 来表示 $[\theta_{xx}]$. 为此，将方程 (4.54) 的两端在 Γ 上取跃度，可得

$$\begin{aligned}&h_{\theta_x}(0,\theta_0,0)[\theta_{xx}] + h_{u_x}(0,\theta_0,0)[u_{xx}] \\ &\quad -\theta_0 p_\theta(0,\theta_0)[u_{xt}] = 0.\end{aligned} \tag{5.26}$$

再注意到 (3.24) 式隐含着 $h_{u_x}(0,\theta_0,0) = 0$, 由 (5.26) 和 (5.21) 式就得到

$$[\theta_{xx}] = -\frac{\theta_0 p_\theta(0,\theta_0)}{Vh_{\theta_x}(0,\theta_0,0)}[u_{tt}]. \tag{5.27}$$

将其代入 (5.25) 式，我们就得到 $a(t)=[u_{tt}]$ 所满足的常微分方程

$$a'(t)+\alpha a^2(t)+\beta a(t)=0, \tag{5.28}$$

其中

$$\alpha=\frac{p_{u_x u_x}(0,\theta_0)}{2V^3},\quad \beta=-\frac{\theta_0 p_\theta^2(0,\theta_0)}{2h_{\theta_x}(0,\theta_0,0)}. \tag{5.29}$$

关于这个常微分方程，我们有如下的

定理 5.1. 对一维非线性热弹性动力学方程组 (4.52) 及 (4.53)，自左向右传入由 (5.9) 式给出的均匀变形和恒温状态的加速度波的振幅

$$a(t)=\frac{\beta}{\left(\dfrac{\beta}{a(0)}+\alpha\right)e^{\beta t}-\alpha}, \tag{5.30}$$

其中 α 及 β 由 (5.29) 式给出．此外，

(1) 假设

$$p_\theta(0,\theta_0)\neq 0, \tag{5.31}$$

那么若

$$|a(0)|<\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \tag{5.32}$$

或

$$\text{sign } a(0)=\text{sign } p_{u_x u_x}(0,\theta_0), \tag{5.33}$$

则当 $t\to+\infty$ 时，$a(t)$ 以 $e^{-\beta t}$ 的衰减率指数地衰减为零．

(2) 假设

$$p_{u_x u_x}(0,\theta_0)\neq 0, \tag{5.34}$$

那么若

$$|a(0)|>\frac{\beta}{|\alpha|} \tag{5.35}$$

且

$$\text{sign } a(0)=-\text{sign } p_{u_x u_x}(0,\theta_0), \tag{5.36}$$

则当 $t\to t_\infty$ 时，$a(t)\to\infty$，其中

$$t_\infty=-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha a(0)}\right). \tag{5.37}$$

证明 常微分方程 (5.28) 属于伯努利 (J. Bernoulli) 方程的类型，求解它具初值 $a(0)$ 的柯西问题，立刻可得 (5.30) 式.

假设 (5.31) 式成立. 此时，由 (4.55) 的第二式知 $h_{\theta_x}(0,\theta_0,0)<0$，因此恒有 $\beta>0$. 在这种情况下，若 $p_{u_xu_x}(0,\theta_0)=0$，则 $\alpha=0$，(1) 的结论显然成立. 若 $p_{u_xu_x}(0,\theta_0)\neq 0$，则 $\alpha\neq 0$，如果进一步假设 (5.32) 式成立，那么由 $a(t)$ 的表达式 (5.30) 易见当 $t\to+\infty$ 时，$a(t)$ 指数地衰减到零，且衰减率为 $e^{-\beta t}$；若 $p_{u_xu_x}(0,\theta_0)\neq 0$ 而 (5.33) 式成立，那么 $\operatorname{sign}\alpha=\operatorname{sign}a(0)$，仍得到同一结论.

在 (5.34)—(5.36) 成立的条件下，$\alpha\neq 0$ 且 $\operatorname{sign}\alpha=-\operatorname{sign}a(0)$. 在这种情况下，若 $\beta=0$，由洛必达 (L'Hospital) 法则或直接求解此时的方程 (5.28)，易知 $a(t)$ 的表达式 (5.30) 化为

$$a(t)=\frac{a(0)}{1+a(0)\alpha t}, \tag{5.38}$$

且由 (5.35) 式，$a(0)\neq 0$. 于是，当 $t\to t_\infty$ 时，$a(t)\to\infty$，其中

$$t_\infty=-\frac{1}{\alpha a(0)} \tag{5.39}$$

由洛必达法则，这就是 (2) 中所要求的结论. 若 $\beta\neq 0$，由 (5.30) 式，当

$$\left(\frac{\beta}{a(0)}+\alpha\right)e^{\beta t}\to\alpha,$$

即

$$t\to\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha a(0)}\right)$$

时，$a(t)\to\infty$. 定理证毕.

对形如

$$u_{tt}-p(u_x)_x=0 \tag{5.40}$$

的非线性波动方程，如果在某一区域中 $p''\neq 0$，就称它在此区域中是真正非线性的. 条件 (5.34) 说明方程 (4.52) 关于未知函数 u 在原点的一个邻域中是真正非线性的. 定理 5.1 的结论 (2) 告诉我们，弹性力学中的非线性响应导致加速度波的不稳定性. 事实上，在没有热传

导效应即 $\beta=0$ 时，不管将加速度波的初始振幅 $a(0)$ 限制在多么小的范围内，总存在由 (5.39) 式给出的有限值 t_∞，使得当 t 趋向于 t_∞ 时，$a(t)$ 趋于无穷大．而在有热传导效应即 $\beta>0$，但没有非线性弹性响应即 $\alpha=0$ 时，由定理 5.1 的结论 (1) 可见，加速度波的传播是稳定的，且当 $t\to+\infty$ 时，$a(t)$ 指数地衰减到零．

在一般的非线性热弹性动力学的框架下，既有非线性弹性响应又有热传导效应，即 α 与 β 均不为零．这两种效应相互制约；有时一种效应占主导地位，有时另一种效应占主导地位．定理 5.1 告诉我们，在这种情况下，当初始振幅 $a(0)$ 比较小时，加速度波 $a(t)$ 的传播是稳定的，且在 $t\to+\infty$ 时，$a(t)$ 指数地衰减到零；而在初始振幅 $a(0)$ 比较大时，加速度波 $a(t)$ 可能在有限时间内趋于无穷大，即发生破裂．

上述讨论启发我们，对非线性热弹性动力学方程组的定解问题，当初值充分小时，可能存在整体光滑解；而对大的初值，其光滑解则可能在有限时间内破裂．关于热弹性力学加速度波的上述讨论是 1965 年由柯尔曼 (B. D. Coleman) 和哥丁 (M. E. Gurtin) 给出的 (见 [3])．其后不久的研究成果表明上述猜想对一维非线性热弹性动力学方程组是正确的 (见 [5], [6], [7])．关于高维非线性热弹性动力学方程组定解问题的整体光滑解的存在性，在初值充分小时也有类似的结果．

习 题

1．证明：若亥姆霍兹自由能函数 $\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta)$ 满足客观性假设 (3.15) 式，$\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F},\theta)$ 由 (3.10) 式给出，则柯西应力张量 $\boldsymbol{T}=\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F},\theta)$ 满足以下关系：

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF},\theta)=\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F},\theta)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任一给定的正交阵．

2．直接利用空间描述下的能量守恒方程 (2.9) 和熵不等式 (2.29)，证明

$$\boldsymbol{q}\cdot\nabla_y\theta\leqslant 0.$$

3．设线性热弹性体 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是自由的 (即无表面力)，已知周围介质在物体表面上的温度为 $\theta_1(t,\boldsymbol{x})$，并设热弹性体在边界上与外部介质按牛顿实验定律进行热交换：单位时间内经过 $\partial\Omega$ 上面积微元 $\mathrm{d}S$ 流向周围介质的热量为

$$k_1(\theta-\theta_1)|_{\partial\Omega}\mathrm{d}S,$$

其中 k_1 为一正常数，称热交换系数. 试导出该线性热弹性体的变形及温度所满足的定解问题.

4. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, $\Theta=\Theta(t,\boldsymbol{x})$ 是线性热弹性动力学方程组 (4.1) 及 (4.3) 在区域 $(0,+\infty)\times\Omega$ 中的解 ($\Omega\subset\mathbb{R}^3$), 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足下述边界条件:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j\bigg|_{\partial\Omega}=0 \quad (i=1,2,3),$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}n_i\bigg|_{\partial\Omega}=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量, 且 $\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0}$, $\gamma\equiv 0$. 在热传导矩阵 (k_{ij}) 为正定的条件下, 证明

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0,$$

其中

$$L(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\rho_0\left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2+\sum_{i,j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+a\Theta^2\right)\mathrm{d}x.$$

5. 证明: 对处于等温状态 (即 $\theta\equiv$ 常数) 的热弹性体, 方程组 (4.16) 化为包含常参数 θ 的非线性弹性动力学方程组.

6. 在热弹性体只作刚体运动时, 即对刚性热传导状态, 证明: 方程 (4.21) 化为关于 θ 的非线性热传导方程 (二阶拟线性抛物型方程).

7. 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$, $\theta=\theta(t,\boldsymbol{x})$ 是非线性热弹性动力学方程组 (4.16) 及 (4.21) 在区域 $(0,+\infty)\times\Omega$ 中的解 ($\Omega\subset\mathbb{R}^3$), 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足固定 (即位移为零) 及绝热边界条件, 又假定 $\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0}$, $\gamma\equiv 0$. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=0,$$

其中

$$L(t)=\int_\Omega\rho_0\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2+\psi+\theta\eta\right)\mathrm{d}x,$$

并说明本题的物理意义.

8　试给出一维非线性热弹性动力学的能量守恒方程 (4.53) 的积分守恒律形式, 由此证明在加速度波曲线 $x = x(t)$ 上成立

$$[\theta_t] = -V(t)[\theta_x],$$

其中 $V(t) = x'(t)$ 为加速度波的传播速度.

9. 讨论具有耗散项的非线性波动方程

$$u_{tt} - (p(u_x))_x + \alpha u_t = 0$$

的加速度波的传播情况, 其中 α 为一正常数, p 满足如下条件:

$$p'(0) > 0, \quad p''(0) \neq 0.$$

这里假定在加速度波曲线 $x = x(t)$ 的右侧, u 恒取常值 u_0, 即

$$u = u_0, \quad 当\ x > x(t)\ 时.$$

参考文献

[1] 谷超豪、李大潜等. 数学物理方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1987

[2] Carlson D E. Linear Thermoelasticity. Handbuch der Physik, VI a/2, 297~345. Berlin: Springer-Verlag, 1972

[3] Coleman B D & Gurtin M E. Waves in materials with memory III, Thermodynamic influences on growth and decay of acceleration waves. Arch. Rat. Mech. Anal., 19(1965). 266~298

[4] Dafermos C M. On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 29(1968). 241~271

[5] Dafermos C M & Hsiao L. Development of singularities in solutions of the equations of nonlinear thermoelasticity. Quart. Appl. Math., 44(1986). 463~474

[6] Slemrod M. Global existence, uniqueness and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional, non linear thermoelasticity Arch. Rat. Mech. Anal., 76 (1981). 97~133

[7] Zheng S & Shen W Global solutions to the Cauchy problem of quasilinear hyperbolic parabolic coupled system. Scientia Sinica, Ser. A 10(1987). 1133~1149

第七章　粘弹性力学

§1. 引　言

1.1. 粘弹性材料

在第五章中，我们考察了纯弹性体的变形规律，其中忽略了内摩擦，也未考虑热传导效应．在第六章中，我们考察了热弹性体的热传导效应与弹性响应的耦合，但仍没有考虑其内部摩擦效应．在这一章中，我们要研究具有内部摩擦的粘弹性材料．这一类材料在荷载的作用下，既有瞬时的弹性响应，又有持续的内部摩擦效应．研究由上述材料构成的粘弹性体 (固体或流体，或介于固体与流体之间的物体) 在荷载作用下，其应力和变形所满足的规律，就构成了粘弹性力学这一学科的基本内容．为了进一步说明粘弹性体的概念，下面首先考察不同类型的材料在荷载作用下其响应特性的差别.

对于弹性体，在突加应力 $\sigma = \sigma_0$ 的作用下，将产生突然应变 $\varepsilon = \varepsilon_0$; 而在卸去荷载 ($\sigma = 0$) 时，应变立即消失 ($\varepsilon = 0$) (见图 1).

对于粘性流体 (参见第二章 (2.1) 式)，突加的常应力 $\sigma = \sigma_0$ 引起突加的应变率 (即应变关于时间 t 的导数) $\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$，从而造成流体的连续流动；而在卸去荷载时，应变不会消失 (见图 2).

还有一类材料，在突加荷载时，既产生类似于弹性固体那样的突然弹性响应，又随之产生类似于粘性流体那样的连续应变，其应力响

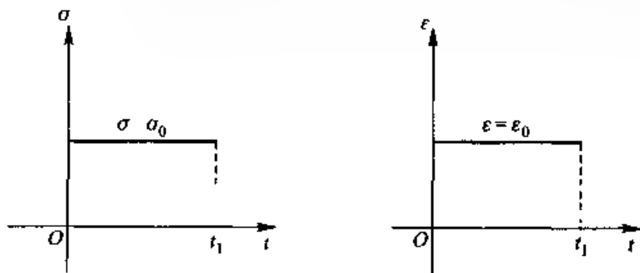


图 1

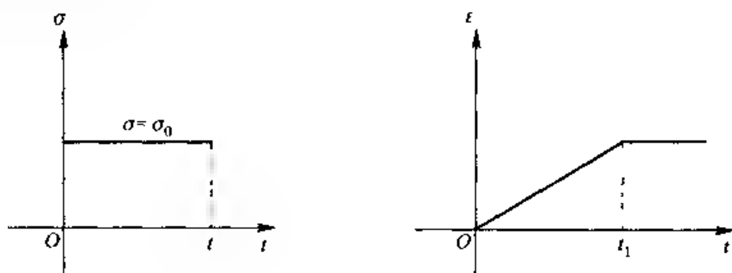


图 2

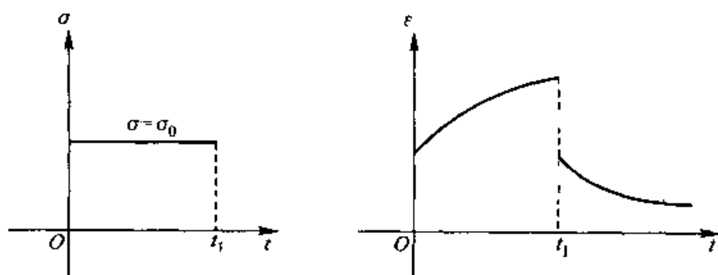


图 3

应介于弹性固体与粘性流体之间. 由于具有内部摩擦效应, 存在着热力学损耗, 这是一个不可逆过程, 卸载后应变不能完全消失 (见图 3). 这一类物体称为粘弹性体; 构成这类物体的材料称为粘弹性材料. 塑料、木材、自然或合成纤维、受热的混凝土与金属以及沥青等, 均属于粘弹性材料的范围.

对粘弹性体的研究始于 1865 年开尔文 (Kelvin) 的工作. 他在为大英百科全书撰写 "热力学第二定律" 条目时, 用金属、木材及棉线等进行扭摆实验, 发现材料并不完全服从胡克定律, 而必须引入粘性影响来考虑材料的内耗, 从而提出了现在以他的名字命名的弹簧–阻尼器并联模型 (见下面的例 4) 来模拟这种现象. 不久, 1867 年麦克斯韦提出了弹簧–阻尼器串联模型 (见下面的例 3). 1874 年玻尔兹曼 (Boltzmann) 利用叠加原理建立了各向同性线性粘弹性体的三维理论. 1909 年沃尔泰拉 (Volterra) 将玻尔兹曼的结果推广到各向异性材料. 但早期关于粘弹性体的研究并未引起科学界与工程界的广泛注意, 发展比较缓慢. 近年来, 对高分子聚合物及复合材料的研究, 对一些重大工程结构 (如核动力工程、地下工程等) 的力学响应和稳

定性分析，以及一些新学科 (如生物力学等) 的出现，都促使人们对粘弹性理论给予足够的重视. 20 世纪 50 年代末到 60 年代初柯尔曼 (Coleman) 和诺尔 (Noll) 等发展了具有记忆材料的本构理论. 特别是柯尔曼 1964 年发表的 "具记忆材料的热动力学" 一文 (见 [4]), 对这一学科的发展起了重要影响. 近三十余年来，粘弹性力学及其相应的数学理论得到了快速的发展，并已出版了专著 (例如 [2]), 在材料科学中的数学理论这一颇受国际应用数学界重视的前沿领域中，现已成为一个活跃的研究课题

1.2. 简单的粘弹性单元

用来同时描述 "弹性" 及 "粘性" 特征的最简单的模型是弹簧加阻尼器. 下面介绍几个用以描述 "粘弹性" 特征的简单模型，即粘弹性单元. 为叙述完整起见，先分别对弹簧及阻尼器进行讨论.

例 1. 弹簧

设 ε 为弹簧的伸长， σ 为拉力，则胡克定律给出

$$\sigma = k\varepsilon \tag{1.1}$$

或

$$\varepsilon = \frac{1}{k}\sigma, \tag{1.2}$$

其中 k 为一个正常数, 称为*弹性系数*. 上述两式就是弹簧的本构方程.

例 2. 阻尼器

阻尼器如图 4 所示，并设 ε 及 σ 的意义同例 1. 对阻尼器而言，其阻尼力与活塞的运动速度成正比. 于是，

$$\sigma = \mu\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{1.3}$$

其中 μ 称为*阻尼系数*. 假定在 t 充分负时， $\varepsilon(t) \equiv 0$, 由上式就可得到

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.4}$$

上述两式就是阻尼器的本构方程. 由 (1.4) 式可见，阻尼器的伸长 ε 在 t 时刻的值，依赖拉力 σ 在 t 之前的整个历史.

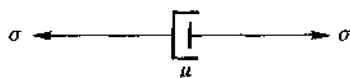


图 4

例 3. 麦克斯韦模型

考察由一个弹簧和一个阻尼器串联组成的粘弹性单元(见图 5). 设弹簧的弹性系数与阻尼器的阻尼系数分别为 k 与 μ, 而它们的伸长则分别记为 ε_1 与 ε_2. 在串联的情况, 弹簧与阻尼器受到的拉力相同, 记为 σ. 由 (1.1) 及 (1.3) 式, 有

$$\sigma = k\varepsilon_1, \quad \sigma = \mu\frac{\mathrm{d}\varepsilon_2}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

注意到单元的总伸长 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, 就得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mu}\sigma. \tag{1.6}$$

求解这个用微分方程 (1.6) 表示的本构关系, 在 $\sigma(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 连续可微, 并假定在 t 充分负时, $\varepsilon(t) = \sigma(t) = 0$, 可得

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{k}\sigma(t) + \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.7}$$

或

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) - \frac{k^2}{\mu}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{k}{\mu}(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.8}$$

(1.7) 及 (1.8) 式就是麦克斯韦模型的本构方程. 由 (1.8) 式可见, 对麦克斯韦模型, 在 t 时刻的拉力 σ, 同样依赖于伸长 ε 在时刻 t 前的整个历史.

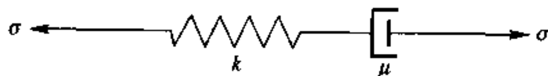


图 5

例 4. 开尔文模型

考察一个由弹簧和阻尼器并联而成的粘弹性单元 (见图 6). 在并联的情况, 弹簧与阻尼器的伸长相同, 记为 ε. 以 σ_1 和 σ_2 分别表示它们受到的拉力, 则总拉力为

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{1.9}$$

由 (1.1) 与 (1.3) 式有

$$\sigma_1 = k\varepsilon, \quad \sigma_2 = \mu\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \tag{1.10}$$

将其代入 (1.9) 式, 即得

$$\sigma = k\varepsilon + \mu\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \tag{1.11}$$

假设在 t 充分负时, $\varepsilon(t) = 0$, 求解上述微分方程可得

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{k}{\mu}(t-\tau)}\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.12}$$

(1.11) 和 (1.12) 式就是开尔文模型的本构方程.

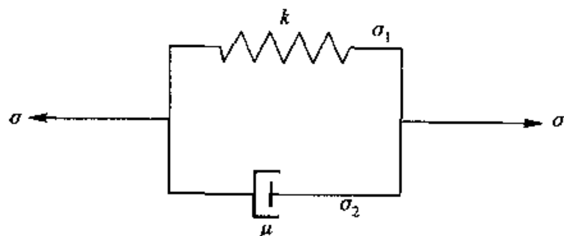


图 6

在例 1 中, 变形 ε 是拉力 σ 的线性函数. 这是一个纯弹性模型. 在例 2 中, 由 (1.3) 式知, 拉力 σ 是变形率 $\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ 的线性函数. 这是一个纯粘性模型. 例 3 和例 4 给出的则是两个典型的粘弹性模型. 对麦克斯韦模型, 如果拉力从某时刻起消失 (即存在 t_1, 使 $t \geqslant t_1$ 时, $\sigma(t) \equiv 0$), 则由 (1.7) 式易见, 当 $t \to +\infty$ 时, $\varepsilon(t)$ 趋于一个非零极限. 这就是说, 在拉力消失后, 粘弹性单元将留下一个永久的变形, 表现出流体

的特征. 因此, 麦克斯韦模型是一个粘弹性流体模型. 对开尔文模型, 若拉力 σ 从某时刻起消失, 则由 (1.12) 式易见, 当 $t \to +\infty$ 时, $\varepsilon(t) \to 0$. 即此时在拉力消失后, 粘弹性单元的变形最终将会消失 (但与纯弹性的情况不同, 其变形并不在拉力消失的瞬间立即消失), 表现出固体的特征. 因此, 开尔文模型是一个粘弹性固体模型. 这里指出, 对许多具体的粘弹性材料, 要明确地区分其为流体还是固体往往是很困难的.

利用弹簧和阻尼器等基本单元, 还可以构造各种各样的粘弹性模型. 对实际的粘弹性材料, 常常利用弹簧及阻尼器的适当组合来模拟其应力响应的情况, 从而给出相应的本构关系. 例如对高分子聚合物, 就有一种模型将其视为由弹簧联接起来的小珠, 而这些小珠又受到周围介质的摩擦力作用. 与这种模型相对应的本构关系也可由此而导出.

在第五章中导出的质量守恒律方程和动量守恒律方程 (组) 对于粘弹性体仍然成立. 下面首先对粘弹性材料的本构方程及其有关性质进行讨论.

§2. 粘弹性材料的本构方程和耗散不等式

2.1. 单积分形式的本构方程

仍采用第五章中的记号. 设粘弹性体变形前 (设为某时刻, 例如 $t=0$) 在空间占据一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. 该区域称为参考构形. 在此区域内的物体质点用其坐标向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 表示. 在时刻 t, Ω 变形为 Ω_t, 其中的点用坐标向量 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)$ 表示. 于是, 这个变形的规律可由

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

描述.

对纯弹性体, 其柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 是变形梯度张量 $\boldsymbol{F}=\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ 的函数. 由上一节可以看出, 粘弹性材料一般来说具有记忆特性: 在时刻 t 、质点 $\boldsymbol{x}$ 处的柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 应依赖于时刻 t 之前、质点 $\boldsymbol{x}$ 附近材料的整个变形历史. 这就是说, 若以 $\boldsymbol{F}^t(s)=\boldsymbol{F}(t-s)$ 简记 $\boldsymbol{F}(t-s, \boldsymbol{x})=\nabla_x \boldsymbol{y}(t-s, \boldsymbol{x})$, 其中 $s \in [0, +\infty)$, 则 $\boldsymbol{T}(t, \boldsymbol{y})$ 应该是

$\boldsymbol{F}^t(s)=\boldsymbol{F}(t-s)\ (s\in[0,+\infty))$ 的一个泛函:

$$\boldsymbol{T}(t,\boldsymbol{y})=\mathcal{T}(\boldsymbol{F}^t(\cdot)) \tag{2.2}$$

这儿,假定材料是齐次的,即 (2.2) 式右端不明显地依赖于 $\boldsymbol{x}$. (2.2) 式是具有记忆的粘弹性材料的本构方程的一般形式.

对于本构方程 (2.2),仍应要求它满足客观性假设 (见第五章 §4). 在现在的情况,客观性假设应取如下的形式:

$$\boldsymbol{Q}(t)\mathcal{T}(\boldsymbol{F}^t(\cdot))\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)=\mathcal{T}(\boldsymbol{Q}^t(\cdot)\boldsymbol{F}^t(\cdot)), \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为任一给定的取值为正交阵的矩阵函数,而 $\boldsymbol{Q}^t(s)=\boldsymbol{Q}(t-s)$, $s\in[0,+\infty)$.

以形如 (2.2) 的一般本构方程为出发点进行讨论,是极端复杂的. 在本章中我们只讨论一类在应用上非常重要、但相对来说便于处理的特殊情况,即考虑下述单积分形式的本构方程:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}^t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(t))+\int_0^{\infty}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{F}(t-\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 为彼奥拉应力张量 (见第五章 §3), $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 及 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$ 均为二阶张量函数. 同时,为简单起见,在 (2.4) 式及以后的讨论中,我们不再标出张量函数 $\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{P}$ 等关于 $\boldsymbol{x}$ 的依赖性. 由柯西应力张量与彼奥拉应力张量之间的关系式: $\boldsymbol{P}=J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$, 其中 $J=\det\boldsymbol{F}$, 容易看出 (2.4) 式实际上也给出了表示柯西应力张量的单积分形式的本构方程.

由于粘性摩擦的影响,粘弹性材料在变形过程中必然有一部分功要转化为热能,从而还应考虑热传导效应. 因此,严格地说,本构方程 (2.2) 和 (2.4) 的右端还应该依赖于绝对温度 θ 在时刻 t 以前的全部历史. 在这种一般的框架中讨论粘弹性体的变形规律,是热粘弹性力学的研究课题. 但本章中我们只讨论等温的特殊情况,即设绝对温度 θ 是一个既不依赖于质点 $\boldsymbol{x}$、也不随时间 t 变化的常数. 在许多实际问题中,或是粘弹性介质中各点的温度相差不大,随时间的变化也不明显;或是所考察的粘弹性介质具有相当高的热传导性,致使其温度分布的不均匀性会由于热传导效应而很快趋于消失. 在这些情况下,均可近似地将粘弹性体的变形视为一个等温的过程来处理.

下面对本构方程 (2.4) 右端的张量函数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 及 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的性质作一初步讨论. 关于这些张量函数应满足的条件的更深入的探讨，留待下段讨论耗散不等式时进行.

单积分形式 (2.4) 的表示方式是否具有唯一性呢？也就是说，对用单积分形式 (2.4) 式给出的同一个本构关系，其中的 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 及 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 是否是唯一确定的？回答是否定的. 只要考察一下上节例 3 中的麦克斯韦模型，就可以看出这一点. 事实上，麦克斯韦模型的本构方程 (1.8) 可以写为如下的单积分形式：

$$\sigma(t)=k\varepsilon(t)-\frac{k^2}{\mu}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{\mu}\tau}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.5}$$

但也可写为

$$\sigma(t)=\frac{k^2}{\mu}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{\mu}\tau}(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.6}$$

为了保证单积分形式的唯一性，我们要求 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足一定的规范性条件. 以后，我们总假定

$$(\mathrm{A}_1)\quad \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0},\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{3\times3}. \tag{2.7}$$

此外，我们总假定 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 及 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 关于 $\tau>0$, $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是适当光滑的张量函数，但容许 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 $\tau=0$ 时具有一定的奇性. 这种奇性在有些实际问题中确会发生. 例如，在描述一类高分子聚合物的粘弹性模型的本构关系中 (见 [3])

$$\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=a(\tau)(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}), \tag{2.8}$$

其中

$$a(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^{\alpha}\tau},\quad \alpha>\frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

现在我们考察上式给出的 $a(\tau)$ 在 $\tau\to+0$ 时的性态. 容易验证：

$$\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-s^{\alpha}\tau}\mathrm{d}s<a(\tau)<\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s^{\alpha}\tau}\mathrm{d}s,\quad \forall\tau>0, \tag{2.10}$$

且当 $\tau\to+0$ 时，

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s^{\alpha}\tau}\mathrm{d}s-\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-s^{\alpha}\tau}\mathrm{d}s=\int_0^1\mathrm{e}^{-s^{\alpha}\tau}\mathrm{d}s\to1. \tag{2.11}$$

作变量代换 $\delta = \tau^{\frac{1}{\alpha}} s$，有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^\alpha \tau}\mathrm{d}s = \tau^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta^\alpha}\mathrm{d}\delta. \tag{2.12}$$

(2.10)—(2.12) 式说明：在 $\tau \to +0$ 时，

$$a(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.13}$$

即由 (2.8) 式给出的 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 $\tau = 0$ 处有形如 $\tau^{-\frac{1}{\alpha}}$ 的奇性. 在 $\alpha > 1$ 时，这个奇性是可积奇性. 为了讨论方便起见，下面我们假定 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 $\tau = 0$ 处具有可积奇性. (但在实际问题中，这个奇性并不总是可积的！) 精确地说，假定

(A$_2$) 对 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 中任一给定的紧集 K，存在函数 $b\in L^1(0,\infty)$ 使得

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})|,\quad |\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})|,\quad |\mathrm{D}_\eta \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})| \\ &\leqslant b(\tau),\quad \forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in K, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \left\{\dfrac{\partial h_{ij}}{\partial \xi_{kl}}\right\}$ 为四阶张量，而 ξ_{kl} 为二阶张量 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量等等，且出现在 (2.14) 左端的张量的模 $|\cdot|$ 则表示该张量各分量绝对值中的最大者.

(A$_3$) 对 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 中的任一给定的紧集 K，存在满足下述条件的函数 $a(\tau)$：

$$a \in L^1(\rho,\infty),\quad \forall \rho > 0, \tag{2.15}$$

$$当\ \rho \to 0\ 时,\quad \rho\int_\rho^\infty a(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0, \tag{2.16}$$

使得

$$\begin{aligned} &|\partial_\tau \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})|, |\partial_\tau \mathrm{D}_\eta \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})| \leqslant a(\tau), \\ &\qquad \forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in K, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $\partial_\tau \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 等等.

记 $C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{3\times3})=\{\boldsymbol{\xi}(t)\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3}),\boldsymbol{\xi}(t)$ 及其导数 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t)}{\mathrm{d}t}$ 在 $t\to-\infty$ 时有界$\}$. 容易看出, 若 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足上述假设 (A_1)–(A_3), 那么对任何给定的 $\boldsymbol{\xi}(t)\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$, 单积分形式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(t))+\int_0^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \tag{2.18}$$

右端的积分是有意义的. 在 (2.18) 式中的 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 称为单积分形式的核. 由假设 (A_1), 当 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 取常值时, 恒有 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(t))$, 故称 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 为平衡响应函数. 对张量 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 我们总假定

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}, \tag{2.19}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量.

引理 2.1. 设 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足如下条件: 对 $\mathbb{R}^{3\times3}$ 中的任一给定的紧集 K, 存在函数 $a\in L^1(\rho,\infty),\forall\rho>0$, 使

$$|\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})|\leqslant a(\tau),\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in K, \tag{2.20}$$

且

$$\int_{0+}^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\zeta}(t),\boldsymbol{\zeta}(t-\tau))\mathrm{d}\tau\text{存在},\quad \forall\boldsymbol{\zeta}\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3}), \tag{2.21}$$

这里及以后, 我们采用以下记号:

$$\int_{0+}^z=\lim_{\rho\to+0}\int_\rho^z$$

又设 $\boldsymbol{\xi}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{3\times3}$ 为只有有限个间断点且分段取常值的张量函数. 那么, 存在序列 $\boldsymbol{\xi}^n\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$ 使当 t 不是 $\boldsymbol{\xi}$ 的间断点时, 成立

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}^n(t),\boldsymbol{\xi}^n(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\&=\int_{0+}^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.22}$$

证明 不失一般性, 我们假定 $\boldsymbol{\xi}$ 只有一个间断点 $d\in\mathbb{R}$. 作 $\boldsymbol{\xi}^n\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$ 使得

$$\boldsymbol{\xi}^n(\tau)=\boldsymbol{\xi}(\tau),\quad 若\ \tau\notin(d-\tfrac{1}{n},d+\tfrac{1}{n}), \tag{2.23}$$

且

$$|\boldsymbol{\xi}^n(\tau)|\leqslant C, \quad \forall\tau\in\mathbb{R},\forall n, \tag{2.24}$$

其中 C 为一个与 τ 及 n 无关的正常数.

注意到 $t\neq d$, 必存在 $\rho_0>0$, 使得当 n 充分大时

$$[t-\rho_0,t]\cap(d-\frac{1}{n},d+\frac{1}{n})=\emptyset. \tag{2.25}$$

于是, 当 $0<\tau<\rho_0$ 时, $\boldsymbol{\xi}^n(t-\tau)=\boldsymbol{\xi}(t-\tau)$. 这样, 对任何给定的 $\rho\in(0,\rho_0)$, 注意到 (2.23) 式, 当 n 适当大时易知有

$$\begin{aligned}&\int_\rho^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}^n(t),\boldsymbol{\xi}^n(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\ &=\int_\rho^{\rho_0}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\ &\quad+\int_{\rho_0}^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}^n(t),\boldsymbol{\xi}^n(t-\tau))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.26}$$

但由假设 (2.21) 式知

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to0}\int_\rho^{\rho_0}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\ &=\int_{0+}^{\rho_0}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{2.27}$$

此外, 由 (2.20)、(2.23)、(2.24) 及勒贝格 (Lebesgue) 控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_0}^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}^n(t),\boldsymbol{\xi}^n(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\ &=\int_{\rho_0}^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.28}$$

从而 (2.22) 式成立. 引理证毕

定理 2.1. 对于给定的单积分形式 (2.18), 满足假设 (A_1)—(A_3) 的 $\boldsymbol{G}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 是唯一确定的.

证明　只需证明: 若 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足假设 (A_1)—(A_3), 且对任何给定的 $\boldsymbol{\xi}\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$ 成立

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(t))+\int_0^\infty \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{0}, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{2.29}$$

则

$$G(\xi) = 0, \quad H(\tau, \xi, \eta) \equiv 0. \tag{2.30}$$

首先，在 (2.29) 式中取 $\xi(t)$ 为常值 ξ, 由假设 (A_1) 立得

$$G(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.31}$$

这样，由 (2.29) 式，对任何给定的 $\xi(t) \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times 3})$ 成立

$$\int_0^\infty H(\tau, \xi(t), \xi(t-\tau))\mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.32}$$

对任意给定的 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 及 $\delta > 0$, 作

$$\zeta(s) = \begin{cases} \eta, & 若\ s \in [-\delta, 0], \\ \xi, & 若\ s\ 取其它值. \end{cases}$$

这样构造的 $\zeta(s)$ 有两个间断点，且分段取常值. 由引理 2.1, (2.32) 式对这种 $\zeta(s)$ 仍然成立. 由此并注意到假设 (A_1), 对任意给定的 $t > 0$, 易知有

$$\int_0^\infty H(\tau, \zeta(t), \zeta(t-\tau))\mathrm{d}\tau - \int_t^{t+\delta} H(\tau, \xi, \eta)\mathrm{d}\tau = 0, \quad \forall \delta > 0. \tag{2.33}$$

将上式除以 δ 后再令 $\delta \to 0$, 即得

$$H(t, \xi, \eta) = 0.$$

这就证明了定理 2.1.

注 2.1. 由上述证明可见，只要 $H(\tau, \xi, \eta)$ 满足假设 (A_1) 及引理 2.1 的条件，且对任意固定的 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 关于 τ 连续，则定理 2.1 的结论仍然成立.

2.2. 耗散不等式及其推论

由于不考虑热传导效应，由上章 (2.25) 及 (2.32) 式知，能量守恒方程在现在的情况下化为

$$\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho_0 \gamma, \tag{2.34}$$

而熵不等式则化为

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}\geqslant\frac{\gamma}{\theta} \tag{2.35}$$

在 (2.34) 与 (2.35) 两式中消去 γ, 即得

$$\rho_0\frac{\partial e}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial t}\leqslant 0 \tag{2.36}$$

在等温即 θ 恒为常数的情况, 引入亥姆霍兹自由能 $\psi=e-\theta\eta$, 并注意到 $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial t}$, (2.36) 式可改写为

$$\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}\leqslant\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}. \tag{2.37}$$

更一般地, 对单积分形式 (2.18), 如果存在一个标量单积分形式

$$\omega(\boldsymbol{\xi}^t)=l(\boldsymbol{\xi}(t))+\int_0^{\infty}m(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \tag{2.38}$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}\omega(\boldsymbol{\xi}^t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}(\boldsymbol{\xi}^t)\frac{\mathrm{d}\xi_{ij}(t)}{\mathrm{d}t},\quad \forall\boldsymbol{\xi}\in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times 3}), \tag{2.39}$$

其中 $p_{ij}(\boldsymbol{\xi}^t)$ 为由 (2.18) 式给出的二阶张量 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)$ 的分量, 则称单积分形式 (2.18) 是耗散的, 而 (2.39) 式称为相应的耗散不等式, $\omega(\boldsymbol{\xi}^t)$ 称为 (2.18) 的耗散势. 对于标量单积分形式 (2.38) 右端的 $l(\boldsymbol{\xi})$ 与 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$, 则要求它们分别满足类似于 $\boldsymbol{G}(\xi)$ 与 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 所满足的条件.

由 (2.37) 式可见, 若粘弹性体的亥姆霍兹自由能存在、且可由一单积分形式表示, 则由 (2.4) 式给出的本构关系是耗散的.

当 $\boldsymbol{G}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 满足什么条件时, 相应的单积分形式 (2.18) 是耗散的呢? 下面的定理 (见 [6]) 将给出一个充分必要条件. 当 $\boldsymbol{G}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 满足这个条件时, 还可以直接由它们构造出标量单积分形式 (2.38) 右端的 l 与 m.

定理 2.2. *单积分形式 (2.18) 为耗散的充分必要条件为: 对任意给定的 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 及 $\tau>0$,*

$$\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}),\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \tag{2.40}$$

是对称的，且成立

$$\int_{\boldsymbol{\eta}}^{\boldsymbol{\xi}} \partial_\tau \boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \leqslant 0, \tag{2.41}$$

其中 $\partial_\tau \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_\tau h_{ij} \mathrm{d}\zeta_{ij}$，即将其视为两个 3×3 维向量的内积，下同.

说明 1. $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\dfrac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{kl}}\right)$ 为四阶张量. (2.40) 式中所要求的 $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 的对称性意味着

$$\frac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{kl}} = \frac{\partial g_{kl}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{ij}} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \tag{2.42}$$

对 $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 的对称性同样理解

说明 2. 假设 $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 是对称的，类似于第一章的引理 6.2，可知必存在标量函数 $l(\boldsymbol{\xi})$ 及 $m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 使得

$$\begin{aligned} g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial l(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{ij}}, \\ h_{ij}(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{\partial m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \xi_{ij}}, \\ &\qquad \forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

事实上，这样的 $l(\boldsymbol{\xi})$ 及 $m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 可分别由下述积分给出：

$$l(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}, \tag{2.43}$$

$$m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\boldsymbol{\eta}}^{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \tag{2.44}$$

显然，在对称性 (2.40) 成立的条件下，以上二积分及 (2.41) 式左端的积分均与积分路径无关

在证明定理 2.2 之前，先给出以下几个引理.

引理 2.2. 设 $m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 满足假设 (A_1)–(A_3)，则

$$\int_0^\infty \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{0+}^{\infty} \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{3\times 3}), \tag{2.45}$$

其中 $\mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 表示二阶张量 $\left(\dfrac{\partial m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_{kl}}\right)$，而 η_{kl} 为二阶张量 $\boldsymbol{\eta}$ 的分量.

证明 记

$$\phi(\tau) = \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t}. \tag{2.46}$$

由假设 (A_2) 及 $\boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3\times 3})$ 知 $\phi \in L^1(0, \infty)$. 注意到 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}\tau}$，显然有

$$\phi(\tau) = \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)). \tag{2.47}$$

利用假设 (A_2) 及 (A_3) 容易验证

$$\text{当 } \tau \to +\infty \text{ 时}, \quad m(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \to 0 \tag{2.48}$$

对 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in K$ 一致地成立，其中 K 为 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 中任一给定的紧集. 这样，注意到当 $t \to -\infty$ 时 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的有界性，由上式就得到

$$\begin{aligned} & \int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \\ = & -m(\rho, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\rho)) \\ = & \int_\rho^\infty \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\rho))\mathrm{d}\tau, \quad \forall \rho > 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

从而由 (2.47) 式，就有

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \phi(\tau)\mathrm{d}\tau \\ = & \int_0^\rho \phi(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_\rho^\infty \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \\ & - \int_\rho^\infty \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\rho))\mathrm{d}\tau, \quad \forall \rho > 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

显然

$$\text{当 } \rho \to +0 \text{ 时}, \quad \int_0^\rho \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0. \tag{2.51}$$

再利用假设 (A_1) 和假设 (A_3) 中的 (2.17) 式，得

$$\begin{aligned} & |\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\rho))| \\ = \ & |\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\rho)) - \partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t))| \\ \leqslant \ & a(\tau)|\boldsymbol{\xi}(t-\rho)-\boldsymbol{\xi}(t)|. \end{aligned} \tag{2.52}$$

这样，再注意到假设 (A_3) 中的 (2.16) 式，易知

$$\text{当 } \rho \to +0 \text{ 时}, \quad \int_\rho^\infty \partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-\rho))\mathrm{d}\tau \to 0. \tag{2.53}$$

在 (2.50) 式中，令 $\rho \to +0$，并注意到 (2.51)、(2.53) 和 (2.46) 式，即得 (2.45) 式. 引理证毕.

引理 2.3. 设 $\boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{3\times3}$, 则存在 $\boldsymbol{\xi}^n \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times3})$ 使得当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\xi}^n(\tau) \to \boldsymbol{\xi}(\tau) \text{ 对 } \tau \in (-\infty,t) \text{ 一致地成立}; \\ & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \to \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}, \quad \forall \tau \in (-\infty,t); \\ & \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right| \text{ 对 } \tau \in (-\infty,t) \text{ 及关于 } n \text{ 均一致有界}, \end{aligned}$$

且对一切 n, 成立

$$\boldsymbol{\xi}^n(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=t} = \mathbf{c}.$$

这个引理的证明作为习题留给读者 (见习题 4).

定理 2.2 的证明 首先证明条件 (2.40)—(2.41) 的必要性. 假定存在标量单积分形式 (2.38) 使耗散不等式 (2.39) 成立. 将 (2.38) 式关于 t 求导一次，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega(\boldsymbol{\xi}^t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}_\xi\omega(\boldsymbol{\xi}^t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$+\int_0^\infty \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau, \tag{2.54}$$

其中

$$\mathrm{D}_\xi\omega(\boldsymbol{\xi}^t) = \mathrm{D}_\xi l(\boldsymbol{\xi}(t)) + \int_0^\infty \mathrm{D}_\xi m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \tag{2.55}$$

表示单积分形式 (2.38) 关于 $\boldsymbol{\xi}^t$ 的现时值 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的导数，称为单积分形式 (2.38) 的 瞬时导数. 将 (2.54) 式代入耗散不等式 (2.39), 就得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}_\xi\omega(\boldsymbol{\xi}^t) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t)}{\mathrm{d}t}\\ &+\int_0^\infty \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau\\ &\qquad\leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times 3}).\end{aligned} \tag{2.56}$$

在上式中，先取 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为引理 2.3 中的 $\boldsymbol{\xi}^n(t)$, 再令 $n \to \infty$, 可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}_\xi\omega(\boldsymbol{\xi}^t) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)) \cdot \boldsymbol{c}\\ &+\int_0^\infty \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau\\ &\qquad\leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times 3}), \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.\end{aligned} \tag{2.57}$$

由此立即可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathrm{D}_\eta m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau \leqslant 0,\\ &\qquad\qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^{3\times 3})\end{aligned} \tag{2.58}$$

及

$$\mathrm{D}_\xi\omega(\boldsymbol{\xi}^t) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t) = \mathbf{0}. \tag{2.59}$$

注意到 (2.55) 式， (2.59) 式又可写为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t) = \mathrm{D}_\xi l(\boldsymbol{\xi}(t)) + \int_0^\infty \mathrm{D}_\xi m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.60}$$

此外，由引理 2.2, (2.58) 式可写为

$$\int_{0+}^\infty \partial_\tau m(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3\times 3}). \tag{2.61}$$

注意到 $\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足引理 2.1 中 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 所满足的条件，重复定理 2.1 的证明步骤，由 (2.61) 式可得

$$\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\leqslant 0,\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times 3} \tag{2.62}$$

将上式关于 τ 从 τ 到 $+\infty$ 积分，并注意 (2.48) 式，就得到

$$m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\geqslant 0,\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.63}$$

于是，由假设 (A_1), $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}$ 时取最小值，从而

$$D_\xi m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0},\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{3\times 3}, \tag{2.64}$$

即 $D_\xi m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 也同样满足假设 (A_1). 比较 (2.18) 与 (2.60) 两式，由单积分形式的唯一性 (虽然 $D_\xi m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 不完全满足假设 (A_1) (A_3), 但由注 2.1 可见，在现在的情况下，定理 2.1 仍然成立), 有

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})=D_\xi l(\boldsymbol{\xi}),\qquad \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=D_\xi m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}),$$
$$\forall\tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.65}$$

这证明了 $D_\xi\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $D_\xi\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的对称性，且

$$m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\int_{\boldsymbol{\eta}}^{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})\cdot d\boldsymbol{\zeta}. \tag{2.66}$$

再由 (2.62) 式就得到 (2.41) 式. 必要性证毕.

现证条件 (2.40) (2.41) 的充分性. 设条件 (2.40) 及 (2.41) 成立, 则 (2.43) 及 (2.44) 式右端的积分与连接 $\boldsymbol{\xi}$ 及 $\boldsymbol{\eta}$ 的积分路径无关, 并将由它们定义的函数分别记为 $l(\boldsymbol{\xi})$ 与 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$. 此时，由 (2.38) 式给出的单积分形式 $\omega(\boldsymbol{\xi}^t)$ 必满足耗散不等式 (2.39), 即充分性成立. 事实上，由 (2.41) 式及 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的表达式 (2.44), 有

$$\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\leqslant 0,\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.67}$$

再由 (2.62) 式开始，按在证明必要性时相反的方向推导，即可证得 $\omega(\boldsymbol{\xi}^t)$ 满足耗散不等式. 定理证毕.

下面我们讨论两个特殊情况.

1° 单积分形式 (2.18) 中的核具有以下形式：

$$\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi})-\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\eta}). \tag{2.68}$$

为了保证 $\widehat{\boldsymbol{H}}$ 的唯一性，通常要求对某一指定的 $\boldsymbol{\xi}^0\in\mathbb{R}^{3\times3}$（一般取 $\boldsymbol{\xi}^0=\boldsymbol{I}$），成立

$$\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi}^0)=0. \tag{2.69}$$

对于具有这种核的单积分形式 (2.18)，其瞬时导数为

$$\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)=\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(t))+\int_0^\infty\mathrm{D}_\xi\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi}(t))\mathrm{d}\tau. \tag{2.70}$$

这样，对两个张量函数 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}\in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{3\times3})$，如果它们在 t 时刻的值相同，即成立

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\zeta}(t), \tag{2.71}$$

就有

$$\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)=\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\zeta}^t). \tag{2.72}$$

这就是说，具有形如 (2.68) 这种核的单积分形式，其瞬时变化与 $\boldsymbol{\xi}^t$ 在 t 之前的历史无关．这是一种在应用上很重要的情况．

定理 2.3. *具有形如 (2.68) 这种核的单积分形式 (2.18) 为耗散的充分必要条件是*

$$\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}),\mathrm{D}_\xi\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi})\ \text{对称},\quad\forall\tau>0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{3\times3}, \tag{2.73}$$

且

$$\partial_\tau\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi})\ \text{是}\ \boldsymbol{\xi}\ \text{的凹（上凸）函数}, \tag{2.74}$$

其中

$$\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi})=\int_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{\xi}}\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \tag{2.75}$$

证明 由定理 2.2，在这个定理的证明中，唯一需要说明的是 (2.74) 式．对 (2.68) 这种形式的核 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$，定理 2.2 中的 (2.41) 式化为

$$\int_{\boldsymbol{\eta}}^{\boldsymbol{\xi}}\partial_\tau\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\leqslant\partial_\tau\widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\eta})\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}). \tag{2.76}$$

由 (2.75) 式，上式又可写为

$$\partial_\tau \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) - \partial_\tau \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\eta}) \leqslant \mathrm{D}_\xi \partial_\tau \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}),$$
$$\forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad (2.77)$$

它等价于 $\partial_\tau \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi})$ 的凹性.

注 2.2. 由定理 2.2 及 2.3 不难看出，在条件 (2.73) 和 (2.74) 满足时，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)$ 的耗散势 $\omega(\boldsymbol{\xi}^t)$ 的核为

$$m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) - \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\eta}) - \widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}), \qquad (2.78)$$

且注意到 $\tau \to +\infty$ 时，$\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \to 0$, 由 (2.77) 式可得

$$\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \text{ 是 } \boldsymbol{\xi} \text{ 的凸（下凸）函数.} \qquad (2.79)$$

2° 单积分形式 (2.18) 的核具有以下形式：

$$\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}). \qquad (2.80)$$

此时，由定理 2.2 立即有

定理 2.4. *具有形如 (2.80) 的核的单积分形式 (2.18) 为耗散的充分必要条件是*

$$\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}), \mathrm{D}_\xi \widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \text{ 对称}, \quad \forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad (2.81)$$

且

$$\partial_\tau \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \leqslant 0, \quad \forall \tau > 0, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad (2.82)$$

其中

$$\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\boldsymbol{H}}(\tau,\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \qquad (2.83)$$

注 2.3. 在条件 (2.81) 及 (2.82) 满足时，单积分形式 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)$ 的耗散势 $\omega(\boldsymbol{\xi}^t)$ 的核为

$$m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}), \qquad (2.84)$$

且由 (2.82) 式可得

$$\widehat{m}(\tau,\boldsymbol{\xi})\geqslant 0,\quad \forall\tau>0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{3\times 3} \tag{2.85}$$

注 2.4. 对具有以上两种特殊形式核的单积分形式，如果作为粘弹性材料的本构关系，一般来说不满足客观性假设.

2.3. 线性粘弹性本构方程

设参考构形 Ω 是粘弹性体的自然状态，即设此时应力张量为零. 假定在参考构形附近有一小变形，即假设成立

$$\|\boldsymbol{F}^t(\cdot)-\boldsymbol{I}\|_{L^\infty(0,\infty)}\ll 1, \tag{2.86}$$

这里二阶张量的 $L^\infty(0,\infty)$ 模指的是其一切分量的 $L^\infty(0,\infty)$ 模中的最大者.

记

$$\nabla\boldsymbol{u}^t(\tau)=\boldsymbol{F}^t(\tau)-\boldsymbol{I}, \tag{2.87}$$

其中 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ 为位移向量. 于是本构方程 (2.4) 可以写为

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u}(t))+\int_0^\infty\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u}(t-\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.88}$$

这里为了简单起见，以 $\boldsymbol{P}(t)$ 表示 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}^t)$. 注意到 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ (见 (2.19) 及 (2.7) 式)，可将上式改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(t)&=\left(\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I})+\int_0^\infty\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})\mathrm{d}\tau\right)\nabla\boldsymbol{u}(t)\\&\quad+\int_0^\infty\mathrm{D}_\eta\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})\nabla\boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+o(\|\nabla\boldsymbol{u}^t(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)}),\end{aligned} \tag{2.89}$$

其中四阶张量与二阶张量的乘积 $\mathrm{D}_\xi\boldsymbol{G}\nabla\boldsymbol{u}$ 定义为如下的二阶张量 $\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\xi_{kl}}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$，其余类同.

由

$$\boldsymbol{A}'(\tau)=\mathrm{D}_\eta\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}) \tag{2.90}$$

及

$$\boldsymbol{A}(0)=\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I})+\int_0^{\infty}\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})\mathrm{d}\tau, \tag{2.91}$$

可在 $[0,+\infty)$ 上唯一决定一个取值为四阶张量的函数 $\boldsymbol{A}(\tau)=(a_{ijkl}(\tau))$，称为单积分形式 (2.18) 相应于自然状态的松弛张量. 这样，本构方程 (2.89) 式可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(t)=&\ \boldsymbol{A}(0)\nabla \boldsymbol{u}(t)+\int_0^{\infty}\boldsymbol{A}'(\tau)\nabla \boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&+o(\|\nabla \boldsymbol{u}^t(\cdot)\|_{L^\infty(0,\infty)}).\end{aligned} \tag{2.92}$$

定理 2.5. 设 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 为耗散的单积分形式 (2.18) 相应于自然状态的松弛张量，则

(1) 对一切 $\tau\geqslant 0$，$\boldsymbol{A}(\tau)$ 为对称，即 $a_{ijkl}(\tau)=a_{klij}(\tau)$.

(2) 在 $\tau>0$ 时，$\boldsymbol{A}'(\tau)$ 半负定：$\boldsymbol{A}'(\tau)\leqslant 0$，即

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a'_{ijkl}(\tau)\xi_{ij}\xi_{kl}\leqslant 0,\quad \forall \boldsymbol{\xi}=(\xi_{ij})\in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

(3) 在 $\tau>0$ 时，$\boldsymbol{A}''(\tau)$ 半正定：$\boldsymbol{A}''(\tau)\geqslant 0$，即

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a''_{ijkl}(\tau)\xi_{ij}\xi_{kl}\geqslant 0,\quad \forall \boldsymbol{\xi}=(\xi_{ij})\in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

证明 由于 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足假设 (A_1)，易知

$$\mathrm{D}_\xi \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=-\mathrm{D}_\eta \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}),\quad \forall \boldsymbol{\xi}\in \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.93}$$

于是，由定理 2.2，$\mathrm{D}_\eta \boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})$ 是对称的. 再利用 (2.90) 式，就得到 $\boldsymbol{A}'(\tau)$ 在 $\tau>0$ 时的对称性. 又由定理 2.2 及 (2.91) 式，$\boldsymbol{A}(0)$ 也是对称的. 这就证明了 (1).

设 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 为单积分形式 (2.18) 的耗散势的核，由定理 2.2 证明中的 (2.63) 和 (2.62) 式，我们有

$$\begin{aligned}m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\geqslant 0,\qquad &\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\leqslant 0,\\&\forall \tau>0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in \mathbb{R}^{3\times 3}.\end{aligned} \tag{2.94}$$

由此，并注意到 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0$，可知 $m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 与 $\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 在 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}$ 时分别取最小值与最大值. 于是有

$$\mathrm{D}_\eta m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0, \tag{2.95}$$

$$\mathrm{D}_\eta^2 m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})\geqslant 0 \tag{2.96}$$

及

$$\mathrm{D}_\eta^2\partial_\tau m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})\leqslant 0 \tag{2.97}$$

对任意给定的 $\tau>0$ 及 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 成立. 类似于 (2.93) 式，由 (2.95) 式可得

$$\mathrm{D}_\xi\mathrm{D}_\eta m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=-\mathrm{D}_\eta^2 m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}). \tag{2.98}$$

此外，由定理 2.2 后面的说明 2, $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\mathrm{D}_\xi m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$. 于是

$$\mathrm{D}_\eta\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})=\mathrm{D}_\xi\mathrm{D}_\eta m(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})=-\mathrm{D}_\eta^2 m(\tau,\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}). \tag{2.99}$$

这样，利用 (2.96)，(2.97) 及 (2.99) 诸式，由 $\boldsymbol{A}'(\tau)$ 的表达式 (2.90) 立刻可得 (2) 及 (3) 的结论. 定理 2.5 证毕.

在 (2.92) 式中忽略高阶小量，将其线性化后就得到

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{A}(0)\nabla\boldsymbol{u}(t)+\int_0^\infty\boldsymbol{A}'(\tau)\nabla\boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.100}$$

写成分量形式即为

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)=&\sum_{k,l=1}^{3}a_{ijkl}(0)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\\&+\sum_{k,l=1}^{3}\int_0^\infty a'_{ijkl}(\tau)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\quad(i,j=1,2,3).\end{aligned} \tag{2.101}$$

这就是**线性粘弹性体**的本构方程.

在忽略高阶小量进行线性化后，彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 与柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 是一样的. 于是，由柯西应力张量的对称性 (见第五章定理 3.2) 及 (2.101) 式，松弛张量 $\boldsymbol{A}(\tau)=(a_{ijkl}(\tau))$ 还具有以下的对称性：

$$a_{ijkl}(\tau)=a_{jikl}(\tau)\quad(i,j,k,l=1,2,3). \tag{2.102}$$

再注意到定理 2.5 的结论 (1) (其中 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 的对称性系指：$a_{ijkl}(\tau)=a_{klij}(\tau)$)，就得到 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 具有以下对称性：

$$a_{ijkl}(\tau)=a_{klij}(\tau)=a_{jikl}(\tau)=a_{ijlk}(\tau). \tag{2.103}$$

考虑到 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 的上述对称性，线性粘弹性体的本构方程 (2.101) 式可以改写为

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) = & \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0)e_{kl}(t) \\ & +\sum_{k,l=1}^{3}\int_0^{\infty} a'_{ijkl}(\tau)e_{kl}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (i,j=1,2,3), \end{aligned} \tag{2.104}$$

其中

$$e_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{2.105}$$

为无穷小应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的分量. (2.104) 式还可简写为

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{E}(t)+\int_0^{\infty}\boldsymbol{A}'(\tau)\boldsymbol{E}(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.106}$$

(2.104) 或 (2.106) 式是常见的线性粘弹性力学中的本构方程，其中 $\boldsymbol{A}(0)$ 也称为瞬时弹性张量. 又当 $\boldsymbol{E}(\tau)$ 不依赖于时间 τ 时，由 (2.106) 式有 $\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{A}(+\infty)\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}(+\infty)=\lim\limits_{\tau\to\infty}\boldsymbol{A}(\tau)$，因而 $\boldsymbol{A}(+\infty)$ 称为平衡弹性张量.

易见本构方程 (2.106) 又可写为如下形式：

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{E}(t)+\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{A}'(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.107}$$

如果将 $\boldsymbol{E}(t)$ 视为未知函数，上式是一个关于 $\boldsymbol{E}(t)$ 的卷积形式的沃尔泰拉型的积分方程组. 在一定条件下，由 (2.107) 式可解得

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{P}(t)+\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}'(t-\tau)\boldsymbol{P}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.108}$$

其中 $\boldsymbol{B}(t)$ 为一个四阶张量函数，称为蠕变张量. 关于松弛张量 $\boldsymbol{A}(t)$ 及蠕变张量 $\boldsymbol{B}(t)$ 的物理意义，将在下文中说明.

下面讨论各向同性的粘弹性材料. 对各向同性材料，四阶张量 $\boldsymbol{A}(\tau)=(a_{ijkl}(\tau))$ 是各向同性张量. 由四阶各向同性张量的一般形式 (见附录一), 有

$$a_{ijkl}(\tau)=\lambda(\tau)\delta_{ij}\delta_{kl}+\alpha(\tau)\delta_{ik}\delta_{jl}+\beta(\tau)\delta_{il}\delta_{jk}, \tag{2.109}$$

其中 $\lambda(\tau)$、$\alpha(\tau)$ 及 $\beta(\tau)$ 均为标量函数. 记

$$\mu(\tau)=\frac{1}{2}(\alpha(\tau)+\beta(\tau)), \tag{2.110}$$

由 (2.109) 式并注意到二阶张量 $\boldsymbol{E}(t)$ 的对称性，易知本构方程 (2.104) 可写为如下形式:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t)=&\ \lambda(0)(e_{11}(t)+e_{22}(t)+e_{33}(t))\delta_{ij}+2\mu(0)e_{ij}(t)\\ &+\delta_{ij}\int_0^{\infty}\lambda'(\tau)(e_{11}(t-\tau)+e_{22}(t-\tau)+e_{33}(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\ &+\int_0^{\infty}2\mu'(\tau)e_{ij}(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{2.111}$$

其中 $\lambda(\tau)$ 及 $\mu(\tau)$ 称为拉梅松弛模量. 这就是各向同性的线性粘弹性材料的本构方程. 上式给出的是应力—应变关系. 也可相应地给出应变—应力形式的本构方程.

由 (2.111) 立即可得

$$p_{ij}(t)=a_1(0)e_{ij}(t)+\int_0^{\infty}a_1'(\tau)e_{ij}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (i,j=1,2,3,i\neq j), \tag{2.112}$$

其中

$$a_1(\tau)=2\mu(\tau). \tag{2.113}$$

此外，在 (2.111) 中令 $i=j$, 并对 i 从 1 到 3 求和，就得到

$$\begin{aligned} &p_{11}(t)+p_{22}(t)+p_{33}(t)\\ =&\ a_2(0)(e_{11}(t)+e_{22}(t)+e_{33}(t))\\ &+\int_0^{\infty}a_2'(\tau)(e_{11}(t-\tau)+e_{22}(t-\tau)+e_{33}(t-\tau))\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{2.114}$$

其中

$$a_2(\tau) = 3\lambda(\tau) + 2\mu(\tau). \tag{2.115}$$

类似地，我们还可以给出相应于 (2.112) 及 (2.114) 式的应变应力关系：

$$\begin{aligned} e_{ij}(t) &= b_1(0)p_{ij}(t) + \int_0^\infty b_1'(\tau)p_{ij}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\qquad (i,j = 1,2,3, i \neq j) \end{aligned} \tag{2.116}$$

及

$$\begin{aligned} &e_{11}(t) + e_{22}(t) + e_{33}(t) \\ = \ &b_2(0)(p_{11}(t) + p_{22}(t) + p_{33}(t)) \\ &+ \int_0^\infty b_2'(\tau)(p_{11}(t-\tau) + p_{22}(t-\tau) + p_{33}(t-\tau))\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{2.117}$$

在以上诸式中出现的函数 a_1、a_2 与 b_1、b_2 分别称为松弛函数与蠕变函数. 正如在弹性力学中 μ 表示剪切模量，$\lambda + \frac{2}{3}\mu$ 表示体积弹性模量一样，a_1、b_1 与 a_2、b_2 为分别对应于剪切变形与体积膨胀的松弛函数和蠕变函数.

下面进一步讨论松弛函数与蠕变函数的意义和性质. 为此，我们将 (2.112) 及 (2.114) 式统一写为如下形式：

$$\sigma(t) = a(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty a'(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.118}$$

其中 σ 与 ε 分别为相应的应力与应变，而松弛函数 $a(\tau)$ 则根据所讨论的情况分别取 $a_1(\tau)$ 或 $a_2(\tau)$. 这里指出，对一维问题 (见本章 §3)，本构方程也取 (2.118) 的形式，而且如果所讨论的是纯剪切变形，则 $a(\tau) = a_1(\tau)$. 这说明讨论形如 (2.118) 的本构方程本身也是具有重要意义的.

设从 $t = 0$ 开始，产生一个常应变 $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0$, 即设

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \tag{2.119}$$

其中 ε_0 为常数，而

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

为赫维赛德函数. 由 (2.118) 式, 相应于这一应变, 有

$$\sigma(t)=\varepsilon_0 a(t). \tag{2.120}$$

从力学的角度看, 显然应该有

$$a(t)\geqslant 0. \tag{2.121}$$

此外, 对于这样一个常应变, 随着时间的增加, 粘弹性体的应力应该逐渐变小, 即其状态逐渐松弛 (见图 7). 这就是 $a(t)$ 称为松弛函数的理由. 因此, 松弛函数 $a(t)$ 应是 t 的单调减少函数, 即

$$a'(t)\leqslant 0. \tag{2.122}$$

本构方程 (2.118) 说明, 在 t 时刻的应力 $\sigma(t)$, 依赖于该时刻前的整个应变历史 $\varepsilon^t(\tau)=\varepsilon(t-\tau)$, $\tau\in[0,+\infty)$. 从直观的角度看, 现时刻 t 的应力, 对应变在历史上不同时刻值的依赖程度当然不会是相同的, 且对应变在历史上越久远时刻的值的依赖程度应该越弱. 这通常称为衰减记忆 (fading memory) 假设. 基于这个假设, 在应力对应变史的依赖关系中, 对于应变在历史上不同时刻的值不能同等对待, 并可通过在依赖关系式中引入一个权函数来体现. 事实上, 本构方程 (2.118) 右端的 $a'(\tau)$ 就起着权函数的作用. 这样, 根据衰减记忆假设, 松弛函数 $a(\tau)$ 还应满足

$$|a'(t_1)|\geqslant|a'(t_2)|,\quad \forall 0<t_1<t_2. \tag{2.123}$$

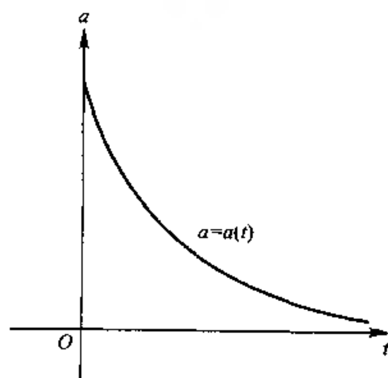


图 7

注意到 (2.122) 式，上式可写为

$$a'(t_1) \leqslant a'(t_2), \quad \forall 0 < t_1 < t_2.$$

即 $a'(t)$ 应是 t 的单调增加函数.

$$a''(t) \geqslant 0 \tag{2.124}$$

(2.122) 及 (2.124) 式与定理 2.5 给出的结果是一致的.

与应力—应变关系 (2.118) 式相应的应变—应力关系为

$$\varepsilon(t) = b(0)\sigma(t) + \int_0^\infty b'(\tau)\sigma(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.125}$$

其中蠕变函数 $b(\tau)$ 根据所讨论的情况分别取 $b_1(\tau)$ 或 $b_2(\tau)$. 假定从 $t=0$ 开始，施加一个常应力 $\sigma(t) \equiv \sigma_0$, 即设

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \tag{2.126}$$

其中 σ_0 为一常数. 相应于这一应力，由 (2.125) 式有

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 b(t) \tag{2.127}$$

显然应该有

$$b(t) \geqslant 0. \tag{2.128}$$

此外，在一个常应力的作用下，随着时间的增加，应变应该增大，因此， $b(t)$ 应是 t 的单调增加函数，即

$$b'(t) \geqslant 0. \tag{2.129}$$

对于蠕变函数 $b(t)$, 衰减记忆假设给出

$$|b'(t_1)| \geqslant |b'(t_2)|, \quad \forall 0 < t_1 < t_2.$$

注意到 (2.129) 式，上式可写为

$$b'(t_1) \geqslant b'(t_2), \quad \forall 0 < t_1 < t_2,$$

即 $b'(t)$ 应是 t 的单调减少函数:

$$b''(t) \leqslant 0. \tag{2.130}$$

以上讨论说明：函数 $b(t)$ 随时间的增加而增大，但其增长速度却越来越慢 (见图 8). 这种情况称为蠕变. 这就是 $b(t)$ 称为蠕变函数的原因.

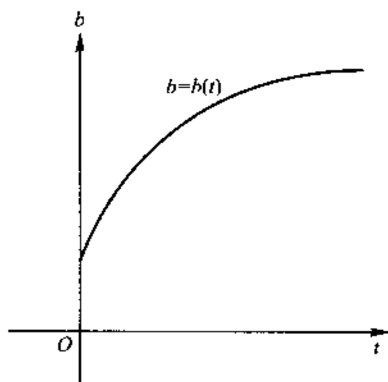


图 8

下面我们粗略地分析一下如何由松弛函数及蠕变函数来区别所讨论的材料是粘弹性固体还是粘弹性流体. 如 §1.1 中所述, 弹性体是固体, 受荷载作用产生变形, 而在荷载取消后, 变形立刻消失; 粘性媒质为流体, 受荷载作用产生变形, 而在荷载取消后, 变形不会消失, 会留下永久的变形. 粘弹性材料介于以上两种情况之间, 一般难以区分其为固体还是流体. 但是, 例如同为粘弹性材料的塑料与沥青, 其特性还是不一样的: 前者具有固体的特性, 而后者则更接近流体. 下面我们根据前述的分析来粗略地 (而不是严格地) 区分何种粘弹性材料是固体, 而何种粘弹性材料是流体

由 (2.129) 和 (2.130) 式, $b'(t)$ 是非负减函数. 若

$$b'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} b'(t) = 0, \tag{2.131}$$

则称相应的材料为粘弹性固体; 而若

$$b'(+\infty) > 0, \tag{2.132}$$

则称相应的材料为粘弹性流体.

现说明上述区分的合理性 设在 $t = t_1$ 时突然施加一个常应力 σ_0, 并在 $t = t_2$ 时突然卸去该应力 由 (2.125) 式可得: 当 $t \to +\infty$ 时,

$$\varepsilon(t) = (b(t-t_1) - b(t-t_2))\sigma_0 \to b'(+\infty)(t_2-t_1)\sigma_0. \tag{2.133}$$

因此，当条件 (2.131) 成立时，随着时间 t 的增加，变形最终趋于消失，材料具有固体的特征；而当条件 (2.132) 成立时，不管过多长时间，变形都不会消失，当 $t\to+\infty$ 时，将留下永久的变形，这符合流体的特性.

对于 §1 例 3 中给出的麦克斯韦模型，由 (1.7) 式容易看出，此时 (2.118) 与 (2.125) 中的 $a(t)$ 及 $b(t)$ 分别为

$$a(t)=ke^{-\frac{k}{\mu}t},\quad b(t)=\frac{1}{k}+\frac{1}{\mu}t \tag{2.134}$$

显然有 $b'(+\infty)=b'(t)=\frac{1}{\mu}>0$，因此这个模型具粘弹性流体的特性. 而对于 §1 例 4 中给出的开尔文模型，由 (1.12) 式容易看出相应地有

$$b(t)=\frac{1}{k}(1-e^{-\frac{k}{\mu}t}) \tag{2.135}$$

在这种情况，$b'(+\infty)=0$. 因此开尔文模型具有粘弹性固体的特性.

在粘弹性力学中，线性粘弹性固体的松弛函数常取如下形式：

$$a(t)=a_0+a_1e^{-\frac{t}{\mu}}, \tag{2.136}$$

其中 a_0、a_1 及 μ 均为正常数. 更一般地，对一些高分子聚合物，其松弛函数有以下形式：

$$a(t)=a_0+\sum_{i=1}^{N}a_ie^{-\frac{t}{\mu_i}}, \tag{2.137}$$

其中 a_0、a_i 及 μ_i $(i=1,\cdots,N)$ 均为正常数.

下面说明松弛函数由 (2.137) 式给出的粘弹性材料必为固体. 为此我们证明一个更一般的结论：若 $a(t)$ 为满足条件 (2.121)—(2.122) 及 (2.124) 的充分光滑函数，且

$$a(+\infty)\neq 0 \tag{2.138}$$

则必成立 (2.131) 式. 为简单计，设 $t\leqslant 0$ 时，$\sigma=\varepsilon=0$. 对 (2.118) 和 (2.125) 二式分别作拉普拉斯 (Laplace) 变换，并注意到拉普拉斯

变换的性质 (参见 [11]), 易知可得

$$\hat{\sigma}(s) = s\hat{a}(s)\hat{\varepsilon}(s), \tag{2.139}$$

$$\hat{\varepsilon}(s) = s\hat{b}(s)\hat{\sigma}(s), \tag{2.140}$$

其中 $\hat{\sigma}$ 表示 σ 的拉普拉斯变换等等. 由以上两式有

$$s^2\hat{a}(s)\hat{b}(s) = 1. \tag{2.141}$$

再注意到拉普拉斯变换的初值定理, 有

$$a(+0) = \lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} s\hat{a}(s), \quad b(+0) = \lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} s\hat{b}(s)$$

于是, 由 (2.141) 式给出

$$a(0)b(0) = 1. \tag{2.142}$$

利用 (2.141)—(2.142) 式及拉普拉斯变换的性质, 容易验证

$$a(0)\widehat{b'}(s) + b(0)\widehat{a'}(s) + \widehat{a'}(s)\widehat{b'}(s) = 0. \tag{2.143}$$

对 (2.143) 式进行拉普拉斯逆变换, 即得

$$a(0)b'(t) + b(0)a'(t) + \int_0^t a'(t-\tau)b'(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{2.144}$$

将上式关于 t 从 0 到 t 积分, 并交换积分次序, 且利用 (2.142) 式, 得到

$$b(0)a(t) + \int_0^t a(\tau)b'(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 1. \tag{2.145}$$

注意到 $a(+\infty) > 0$, 若 $b'(+\infty) > 0$, 则当 $t \to +\infty$ 时, 必有

$$\int_0^t a(\tau)b'(t-\tau)\mathrm{d}\tau \to +\infty. \tag{2.146}$$

但 (2.146) 式与 (2.145) 式不可能同时成立. 所以必成立 (2.131) 式.

§3. 粘弹性力学方程组及其定解问题

3.1. 线性粘弹性动力学方程组

如本章引言中所述，在第五章中给出的动量守恒方程组 (见第五章 (3.44) 式) 对粘弹性材料仍然成立. 将线性粘弹性材料的本构方程 (2.101) 代入该动量守恒方程组，就得到

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}(t, \boldsymbol{x}) + \sum_{j,k,l=1}^{3} \int_0^{\infty} a'_{ijkl}(\tau) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}(t-\tau, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\tau + \rho_0 b_i(t, \boldsymbol{x}) \quad (i = 1,2,3) \tag{3.1}$$

这就是线性粘弹性动力学方程组. 令 $t-\tau$ 为新的积分变量，上述方程组又可写为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}(t, \boldsymbol{x}) + \sum_{j,k,l=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} a'_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}(\tau, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\tau + \rho_0 b_i(t, \boldsymbol{x}) \quad (i = 1,2,3). \tag{3.1$'$}$$

它是一个二阶线性沃尔泰拉型积分-偏微分方程组.

在讨论对这个方程组可以提何种定解问题之前，首先考察该方程组的类型. 因为方程组 (3.1) 不是一个纯粹的偏微分方程组，我们不能按照常规的关于二阶偏微分方程组分类的方法来简单地确定其类型. 毫无疑问，线性粘弹性动力学方程组 (3.1) 是一个发展型方程组. 但同为发展型方程的双曲型方程与抛物型方程在特性上却有实质性的差异，其主要表现在下述两个有着密切联系的方面. 第一方面涉及扰动的传播速度. 对于线性双曲型方程，扰动具有有限的传播速度：如果在初始时刻方程的解在某点附近有一个扰动，随着时间的增加，这个扰动将以有限的速度向外传播. 但对线性抛物型方程，扰动的传播速度

却是无限的：初始时刻某点附近的扰动，瞬间即可传到任何地方．第二方面涉及解的光滑性．（具有足够光滑系数，例如常系数的）线性双曲型方程的解将保持与初始数据同等的光滑性，也就是说，若初始数据有某种间断，那么这个间断会在以后的时刻一直保留下来．而对线性抛物型方程来说，即使在初始时刻 $t=0$ 时解具有某种间断，当 $t>0$ 时这一间断会在倾刻间消失，解变得非常光滑．下面我们主要根据这两个特性，来设法确定积分—偏微分方程组 (3.1) 的类型．如所周知，纯粹弹性导致动力学方程组的双曲性，纯粹粘性导致动力学方程组的抛物性．由于粘弹性材料的特性介于弹性与粘性之间，方程组 (3.1) 的类型亦可能介于双曲与抛物两种类型之间．要确定其到底应属于双曲型还是抛物型，就要看弹性与粘性这两个因素哪一个占据主导地位．

对瞬时弹性张量 $\boldsymbol{A}(0)=(a_{ijkl}(0))$ 我们仍假定它满足强椭圆性条件，即存在正常数 α 使

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0)\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l \geqslant \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2|\boldsymbol{\eta}|^2,\quad \forall \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

定义 3.1. 设瞬时弹性张量 $\boldsymbol{A}(0)=(a_{ijkl}(0))$ 满足强椭圆性条件 (3.2)，且 $\boldsymbol{A}'(\tau)=(a'_{ijkl}(\tau))$ 在 $\tau=0$ 时具有可积奇性，就称方程组 (3.1) 为线性双曲型沃尔泰拉积分—偏微分方程组，简称为双曲型的．

根据定义 3.1，若方程组 (3.1) 中的积分核 $\boldsymbol{A}'(\tau)=(a'_{ijkl}(\tau))$ 在 $\tau=0$ 附近可积，则该方程组是否为双曲型仅由瞬时弹性张量 $\boldsymbol{A}(0)=(a_{ijkl}(0))$ 决定．在核 $\boldsymbol{A}'(\tau)$ 正则，即在 $\tau=0$ 处无奇性的情况，无论从扰动传播速度的有限性还是从解的光滑性来说，上述定义都是合理的．但当 $\boldsymbol{A}'(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处具有可积奇性时，方程组的解虽然具有有限传播速度，但初始时解的间断在以后时刻一般说来并不保留．这时的方程组实际上介于双曲型与抛物型之间（见下节关于线性波传播的讨论），但我们还是称其为双曲型的．

二阶线性双曲型积分—偏微分方程组 (3.1) 的典型定解问题仍是柯西问题和混合初—边值问题．但与纯粹的偏微分方程组不同，方程组 (3.1) 中包含未知函数 $\boldsymbol{u}$ 从 $-\infty$ 到现时刻 t 的整个历史值的积分．因此，在讨论这种方程组的定解问题的解从时刻 $t=0$ 开始以后的变化时，必须事先知道 $\boldsymbol{u}$ 在 $t=0$ 以前的全部历史值，即假设

$$u_i(t,\boldsymbol{x})=\varphi_i(t,\boldsymbol{x}),\quad -\infty<t<0\quad (i=1,2,3), \tag{3.3}$$

其中 $\varphi_i(t,\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3)$ 为定义在 $(-\infty,0)\times\mathbb{R}^3$ 或 $(-\infty,0)\times\Omega$ (视定解问题为柯西问题还是混合初–边值问题而定) 中的已知函数. 这样, 如果记

$$\begin{aligned} f_i(t,\boldsymbol{x}) &= \rho_0 b_i(t,\boldsymbol{x}) \\ &+ \sum_{j,k,l=1}^{3}\int_{-\infty}^{0} a'_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial^2\varphi_i(\tau,\boldsymbol{x})}{\partial x_j\partial x_l}\mathrm{d}\tau \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{3.4}$$

则方程组 (3.1) 或 $(3.1)'$ 可改写为

$$\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) = &\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t,\boldsymbol{x}) \\ &+\sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^t a'_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial^2 u_k(\tau,\boldsymbol{x})}{\partial x_j\partial x_l}\mathrm{d}\tau \\ &+ f_i(t,\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $t>0$.

柯西问题 对于任意给定的正数 $T>0$, 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ 中求积分–偏微分方程组 (3.5) 的解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, 使其在 $t=0$ 时满足如下的初始条件:

$$\begin{aligned} u_i(0,\boldsymbol{x}) &= u_i^0(\boldsymbol{x}), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) &= u_i^1(\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, 而 $u_i^0(\boldsymbol{x})$ 及 $u_i^1(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3)$ 为已知函数.

混合初–边值问题 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, 在 $(0,T)\times\Omega$ 中求积分–偏微分方程组 (3.5) 的解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, 使其在 $t=0$ 时满足形如 (3.6) 的初始条件 (其中 $\boldsymbol{x}\in\Omega$), 且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足边界条件:

$$u_i|_{\partial\Omega} = d_i(t,\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3) \tag{3.7}$$

或

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l=1}^{3}\left(a_{ijkl}(0)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\int_0^t a'_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau,\boldsymbol{x})}{\partial x_l}\mathrm{d}\tau\right)n_j\Big|_{\partial\Omega} \\ = \sigma_i(t,\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $T>0$ 为任意给定的正数，d_i 和 σ_i $(i=1,2,3)$ 为定义在 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上的已知函数，n_j $(j=1,2,3)$ 为 $\partial\Omega$ 上单位外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量. 边界条件的提法也可以采取如下的混合形式：设 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 由两部分 Γ_1 和 Γ_2 组成，并在 Γ_1 与 Γ_2 上分别给出形如 (3.7) 与 (3.8) 的边界条件

边界条件 (3.7) 与 (3.8) 的意义是在粘弹性体的边界 $\partial\Omega$ 上分别给定位移与应力. 在 $(0,T)\times\Omega$ 的侧边界 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上的任一给定点 $(t,\boldsymbol{x})$ $(t>0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega)$，形如 (3.8) 的边界条件不仅依赖于未知函数 $\boldsymbol{u}$ 的偏导数在该点的值，而且依赖于未知函数 $\boldsymbol{u}$ 的偏导数在该点从时刻 0 到 t 的整个值. 这说明，(3.8) 是一个非局部型的边界条件.

在讨论积分—偏微分方程组 (3.5) 的定解问题及其解的性质时，除要求瞬时弹性张量 $\boldsymbol{A}(0)=(a_{ijkl}(0))$ 满足强椭圆性条件外，还应该充分利用耗散不等式所提供的结果. 由定理 2.5 知，为此还应该要求松弛张量 $\boldsymbol{A}(t)$ 满足

$$\boldsymbol{A}'(t)=(a'_{ijkl}(t))\leqslant\boldsymbol{0},\quad \forall t>0 \tag{3.9}$$

及

$$\boldsymbol{A}''(t)=(a''_{ijkl}(t))\geqslant\boldsymbol{0},\quad \forall t>0. \tag{3.10}$$

对于上述线性积分—偏微分方程组的定解问题，原则上可以用处理相应的线性发展型偏微分方程的方法加以讨论，但在具体处理上，还应考虑到其形式上的特殊性. 我们以下面的定解问题为例，提供一种可用算子半群方法来讨论这类积分—偏微分方程组的定解问题的方法：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x})-\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}(0)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t,\boldsymbol{x})\\&\quad+\sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^\infty a'_{ijkl}(\tau)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t-\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau,\\&\qquad\qquad t>0,\boldsymbol{x}\in\Omega\quad(i=1,2,3),\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$u_i|_{(0,\infty)\times\partial\Omega}=0\quad(i=1,2,3), \tag{3.12}$$

$$u_i(t,\boldsymbol{x})=\phi_i(t,\boldsymbol{x}),\quad t\leqslant 0,\boldsymbol{x}\in\Omega\quad(i=1,2,3), \tag{3.13}$$

其中 $\phi_i(t,\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3)$ 为定义在 $(-\infty,0]\times\Omega$ 上的已知函数.

记

$$v_i(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} w_i(t,\boldsymbol{x},\tau) &= u_i^t(\tau,\boldsymbol{x}) - u_i(t,\boldsymbol{x}) \\ &= u_i(t-\tau,\boldsymbol{x}) - u_i(t,\boldsymbol{x}) \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \tag{3.15}$$

易知方程组 (3.11) 可以改写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = v_i(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(+\infty)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}(t,\boldsymbol{x}) \\ &\quad + \sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^{\infty} a'_{ijkl}(\tau)\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_j \partial x_l}(t,\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}(t,\boldsymbol{x},\tau) = -\frac{\partial w_i}{\partial \tau}(t,\boldsymbol{x},\tau) - v_i(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.18}$$

其中 $i=1,2,3$. 又由条件 (3.13) 可得在 $t=0$ 时成立

$$u_i(0,\boldsymbol{x}) = \phi_i(0,\boldsymbol{x}), \tag{3.19}$$

$$v_i(0,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}), \tag{3.20}$$

$$w_i(0,\boldsymbol{x},\tau) = \phi_i(-\tau,\boldsymbol{x}) - \phi_i(0,\boldsymbol{x}), \tag{3.21}$$

其中 $i=1,2,3$. 此外, 未知函数 $w_i(t,\boldsymbol{x},\tau)$ 还显然满足如下的条件:

$$\tau = 0\ \text{时}, \quad w_i(t,\boldsymbol{x},\tau) = 0 \quad (i=1,2,3). \tag{3.22}$$

将方程组 (3.16)—(3.18) 视为以 t 为时间变量的发展型方程, 其中变量 τ $(0\leqslant\tau<\infty)$ 和空间变量 $\boldsymbol{x}$ 处于类似的地位, 于是 (3.22) 式实际上是一组在 $\tau=0$ 处的边界条件.

记

$$U(t,\boldsymbol{x},\tau) = (\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x},\tau)). \tag{3.23}$$

方程组 (3.16)—(3.18) 可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU, \tag{3.24}$$

其中 A 为一个适当的线性算子，而初始条件 (3.19)—(3.21) 可写为

$$U(0, \boldsymbol{x}, \tau) = U^0(\boldsymbol{x}, \tau), \tag{3.25}$$

其中 $U^0(\boldsymbol{x}, \tau)$ 为已知的向量函数. 这样，给定未知函数在 $t=0$ 之前的整个历史值的积分—偏微分方程组的定解问题，就化为可以利用算子半群方法加以讨论的标准形式.

下面具体考察各向同性材料的情况. 将各向同性线性粘弹性材料的本构方程 (2.111) 代入动量守恒方程组 (见第五章 (3.44) 式)，可得相应的动力学方程组如下：

$$\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{x}) \\
= \ & \mu(0)\Delta u_i(t, \boldsymbol{x}) + (\lambda(0) + \mu(0)) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}(t, \boldsymbol{x}) \\
&+ \int_0^{\infty} \mu'(\tau)\Delta u_i(t-\tau, \boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^{\infty} (\lambda'(\tau) + \mu'(\tau)) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}(t-\tau, \boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau \\
&+ \rho_0 b_i(t, \boldsymbol{x}) \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

由第五章 (5.7) 式，此时瞬时弹性张量应满足的强椭圆性条件取如下形式：

$$\mu(0) > 0, \quad \lambda(0) + 2\mu(0) > 0. \tag{3.27}$$

至于各种定解问题的提法，可参照前述的一般情况相应地给出，不再赘述 (见习题 10).

对于稳态问题，即 $\boldsymbol{u}$ 不依赖于 t 的情况，此时 $\boldsymbol{b}$ 应与 t 无关，且易知方程组 (3.1) 化为

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(+\infty) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.28}$$

其中 $\boldsymbol{A}(+\infty)=(a_{ijkl}(+\infty))$ 称为平衡弹性张量. 在平衡弹性张量 $\boldsymbol{A}(+\infty)$ 满足强椭圆性条件的假设下, 方程组 (3.28) 是一个二阶线性椭圆形偏微分方程组, 其定解问题在第五章 §6.1 中已经作过讨论.

与纯粹弹性的情况不同, 在粘弹性情况还有一类拟稳态问题. 此时, 位移 $\boldsymbol{u}$ 虽仍依赖于时间 t, 但惯性项 $\rho_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$ 却非常小, 可以忽略不计. 于是方程组 (3.1) 就化为如下形式:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t,\boldsymbol{x})\\
&+\sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^\infty a'_{ijkl}(\tau)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t-\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau+\rho_0 b_i(t,\boldsymbol{x})=0\\
&\qquad\qquad\qquad (i=1,2,3).
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

要求解这个方程组, 除应给出适合二阶椭圆型偏微分方程组要求的边界条件外, 还要假定位移 $\boldsymbol{u}$ 在某时刻 (如 $t=0$) 前的历史值是已知的. 类似于前面关于动力学问题的讨论 (见 (3.5) 式), 方程组 (3.29) 可化为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(0)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(t,\boldsymbol{x})\\
&+\sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^t a'_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}(\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau+f_i(t,\boldsymbol{x})=0\\
&\qquad\qquad\qquad (i=1,2,3).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

对于这个方程组, 可以像二阶线性椭圆型方程组那样, 利用在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给出的边界条件求解.

3.2. 非线性粘弹性动力学方程组

将单积分形式的本构关系 (2.4) 代入动量守恒方程组 (见第五章 (3.43) 式), 就得到

$$
\begin{aligned}
\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial t^2}&=\mathrm{div}\boldsymbol{G}(\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\\
&+\int_0^\infty \mathrm{div}\boldsymbol{H}(\tau,\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau+\rho_0\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

其中 div 与 ∇ 分别表示关于变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的散度与梯度，而二阶张量函数如 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 的散度 div$\boldsymbol{G}$ 定义为一阶张量 $\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j}\right)$（见附录一）. 将上式写为分量的形式，就有

$$\begin{aligned}
&\rho_0\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x})\\
=\ &\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ij}(\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\\
&+\sum_{j=1}^{3}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_j}h_{ij}(\tau,\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau\\
&+\rho_0 b_i(t,\boldsymbol{x})\quad(i=1,2,3).
\end{aligned}\tag{3.32}$$

方程组 (3.32) 是一个二阶拟线性沃尔泰拉型积分–偏微分方程组. 打开 (3.32) 式右端的偏导数，易知这个积分–偏微分方程可改写为

$$\begin{aligned}
&\rho_0\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x})\\
=\ &\sum_{j,k,l=1}^{3}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\right.\\
&\left.+\int_0^\infty\frac{\partial h_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\tau,\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau\right)\times\\
&\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j\partial x_l}(t,\boldsymbol{x})\\
&+\sum_{j,k,l=1}^{3}\int_0^\infty\frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta_{kl}}(\tau,\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\times\\
&\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j\partial x_l}(t-\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau\\
&+\rho_0 b_i(t,\boldsymbol{x})\quad(i=1,2,3).
\end{aligned}\tag{3.33}$$

定义 3.2. 设 $\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 满足 §2 中的假设 (A_1)–(A_3)，且 $G(\boldsymbol{\xi})$ 满足 (2.19) 式. 对由单积分形式 (2.18) 式给出的本构方程，如果瞬时导数 $D_\xi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t)$ 满足强椭圆性条件，即对任意给定的 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$,

成立

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\nabla \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})) + \int_0^{\infty}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\tau,\nabla \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla \boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau\right)\lambda_i\lambda_k\mu_j\mu_l > 0,$$
$$\forall \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in \mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\}, \tag{3.34}$$

则称方程组 (3.33) 为二阶拟线性双曲型积分–偏微分方程组，简称为双曲型的．

下面我们总假定方程组 (3.33) 是双曲型的．

积分–偏微分方程组 (3.33) 的典型定解问题仍是柯西问题和混合初–边值问题．在讨论这些定解问题时，和线性的情况一样，也必须给出未知函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$ 在某时刻 (如 $t=0$) 之前的整个历史值：

$$y_i(t,\boldsymbol{x})=\varphi_i(t,\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3),\quad \forall t<0, \tag{3.35}$$

其中 $\varphi_i\ (i=1,2,3)$ 为给定的函数．

方程组 (3.33) 的柯西问题的提法形式上与线性粘弹性动力学情形类似．但如上所述，在线性情况，常取位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 为未知函数；而在非线性情况，通常取变形后质点的空间坐标 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 为未知函数．

方程组 (3.33) 的混合初–边值问题的提法是：设 $T>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. 在 $(0,T)\times\Omega$ 中求方程组 (3.33) 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$，使其在 $t=0$ 时满足初始条件

$$y_i(0,\boldsymbol{x})=y_i^0(\boldsymbol{x}),\quad \frac{\partial y_i}{\partial t}(0,\boldsymbol{x})=y_i^1(\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3), \tag{3.36}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，而 $y_i^0(\boldsymbol{x})$, $y_i^1(\boldsymbol{x})\ (i=1,2,3)$ 为给定的函数，且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足下列边界条件之一：

$$y_i|_{\partial\Omega}=z_i(t,\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3) \tag{3.37}$$

或

$$\sum_{j=1}^{3}\left(g_{ij}(\nabla \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})) + \int_{-\infty}^{t}h_{ij}(t-\tau,\nabla \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla \boldsymbol{y}(\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau\right)n_j\Big|_{\partial\Omega} = \sigma_i(t,\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3), \tag{3.38}$$

其中 $z_i(t,\boldsymbol{x})$ 与 $\sigma_i(t,\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3)$ 为给定在 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上的已知函数，$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量.

边界条件 (3.38) 相当于在边界 $\partial\Omega$ 上给定应力. 它是一个非线性非局部型的边界条件，具有相当大的复杂性. 此外，实际问题中真正给出的往往是在变形后的粘弹性体 Ω_t 的边界 $\partial\Omega_t$ 上的应力向量 $\boldsymbol{T\nu}|_{\partial\Omega_t}$，其中 $\boldsymbol{T}$ 为柯西应力张量，而 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\partial\Omega_t$ 上的单位外法线向量. 在将这一边界条件转换为 (3.38) 的形式时，其右端还可能包含未知函数甚至未知函数的切向偏导数 (见第五章例 6.1).

对方程组 (3.33) 的定解问题的讨论，近年来已有不少工作. 粗略地说，在一定的假设下可以证明整体弱解的存在性及在小初值情况下整体经典解的存在性，后者的实现依赖于较 §2 中所述为更强的耗散不等式. 但对于形如 (3.38) 的边界条件，对其相应的定解问题的讨论还几乎没有展开.

3.3. 一维非线性粘弹性动力学方程

粘弹性杆的纯轴向变形由下式给出：

$$y_1=x_1+u_1(t,x_1),\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3. \tag{3.39}$$

在这种情况下, 由本构方程 (2.4) 可以看出：彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$ 只是 t 及 x_1 的函数; 又假设 $\boldsymbol{b}$ 与 x_2、x_3 无关. 粘弹性动力学方程组 (3.32) 的第一个方程于是化为

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=&\frac{\partial}{\partial x_1}g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\\&+\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_1}h\left(\tau,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(t,x_1),\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(t-\tau,x_1)\right)\mathrm{d}\tau\\&+\rho_0b_1(t,x_1),\end{aligned}\tag{3.40}$$

其中简记 $g\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=g_{11}(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})$, 而 $\nabla\boldsymbol{u}=\mathrm{diag}\left\{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1},0,0\right\}$ 等.

粘弹性材料的纯剪切变形由下式给出：

$$y_1=x_1+u_1(t,x_2),\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3 \tag{3.41}$$

此时需假设 $\boldsymbol{b}$ 与 x_1、x_3 无关. 对这种变形，粘弹性动力学方程组

(3.32) 的第一个方程化为如下形式:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial x_2} g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ & + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} h\left(\tau, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(t, x_2), \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(t-\tau, x_2)\right) \mathrm{d}\tau \\ & + \rho b_1(t, x_2),\end{aligned} \tag{3.42}$$

其中 $g\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = g_{12}(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u})$, 而 $\boldsymbol{u} = (u_1(t, x_2), 0, 0)$ 等.

方程 (3.40) 和 (3.42) 可以统一地写为

$$\begin{aligned}\rho_0 u_{tt} = & (g(u_x))_x + \int_0^{\infty} (h(\tau, u_x(t,x), u_x(t-\tau, x)))_x \mathrm{d}\tau \\ & + \rho_0 b(t, x),\end{aligned} \tag{3.43}$$

其中 u 、 g 与 h 均为标量. 分别对纯轴向变形 (3.39) 与纯剪切变形 (3.41) 这两种情形的强椭圆性条件进行讨论, 可以得到: 对于方程 (3.40) 与 (3.42) 的统一形式 (3.43), 其强椭圆性条件意味着

$$g'(u_x) + \int_0^{\infty} h_{\xi}(\tau, u_x(t,x), u_x(t-\tau, x)) \mathrm{d}\tau > 0, \tag{3.44}$$

其中 $h_{\xi}(\tau, u_x(t,x), u_x(t-\tau,x))$ 表示 $h(\tau, u_x(t,x), u_x(t-\tau,x))$ 关于变量 $u_x(t,x)$ 的导数.

下面考察耗散不等式在一维情形的表现形式及其推论. 对于一维粘弹性力学方程 (3.43), 相应于定理 2.2 中 (2.41) 式的耗散不等式化为

$$\int_{\eta}^{\xi} \partial_{\tau} h(\tau, \zeta, \eta) \mathrm{d}\zeta \leqslant 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \tau > 0. \tag{3.45}$$

现在我们对在理论和应用上都非常重要的一种特殊情况作进一步的讨论. 考察如下形式的方程

$$\begin{aligned}\rho_0 u_{tt} = & (\phi(u_x))_x + \int_0^{\infty} a'(\tau)(\psi(u_x(t-\tau, x)))_x \mathrm{d}\tau \\ & + b(t, x).\end{aligned} \tag{3.46}$$

假定 $a(+\infty) = 0$, 容易看出, 对于这个方程而言, (3.43) 中的 g 及 h 分别为

$$g(\xi) = \phi(\xi) - a(0)\psi(\xi), \quad h(\tau, \xi, \eta) = a'(\tau)(\psi(\eta) - \psi(\xi)). \tag{3.47}$$

此时，强椭圆性条件 (3.44) 化为

$$\phi'(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.48}$$

而耗散不等式 (3.45) 则化为

$$a''(\tau)\int_\eta^\xi (\psi(\eta) - \psi(\zeta))\mathrm{d}\zeta \leqslant 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \tau > 0 \tag{3.49}$$

(3.49) 式说明 $a''(\tau)$ 应具有确定的符号. 不失一般性，我们假设

$$a''(\tau) \geqslant 0, \quad \forall \tau > 0. \tag{3.50}$$

进一步假定 $a'(+\infty) = 0$, 将上式由 τ 到 $+\infty$ 积分，立即得到

$$a'(\tau) \leqslant 0, \quad \forall \tau > 0 \tag{3.51}$$

由此并注意到已设 $a(+\infty) = 0$, 类似地可得

$$a(\tau) \geqslant 0, \quad \forall \tau > 0. \tag{3.52}$$

此外，由 (3.49) 与 (3.50) 式又有

$$\int_\eta^\xi (\psi(\zeta) - \psi(\eta))\mathrm{d}\zeta \geqslant 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}. \tag{3.53}$$

由此易见， $\psi(\xi)$ 为单调增加函数，即

$$\psi'(\xi) \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{3.54}$$

(见习题 11).

定义 3.3. 设 $a \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty)$, 如果对任意给定的 $w \in C[0, \infty)$ 及任意给定的 $T > 0$, 均成立

$$\int_0^T w(t)\int_0^t a(t-\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{3.55}$$

则称函数 $a(t)$ 为正定的. 此外，若存在 $\varepsilon > 0$, 使得函数 $a(t) - \varepsilon \mathrm{e}^{-t}$ 是正定的，则称函数 a 为强正定的.

可以证明：若 $a \in C^2[0, \infty)$, $a' \neq 0$, 且

$$(-1)^j a^{(j)}(t) \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0 \quad (j = 0, 1, 2), \tag{3.56}$$

则 a 是强正定的 (参见 [12]).

由 (3.50)—(3.52) 可见, 对于形如 (3.46) 的积分—偏微分方程, 在 $a \in C^2[0,\infty)$ 等有关的条件下, 耗散不等式实际上要求核 $a(t)$ 是强正定的. 现有的关于方程 (3.46) 的研究成果, 绝大部分是在 $a(t)$ 为强正定的假定下得到的 (见 [2] 及其中的参考文献).

§4. 核的奇性与线性波的传播

本节对线性粘弹性动力学方程组考察核的奇性对解的性态的影响. 为简单起见, 以一维线性粘弹性动力学方程为例进行讨论.

线性粘弹性动力学方程组 (3.1) 在一维情况 (参见 §3.3 中的讨论) 化为

$$\begin{aligned}\rho_0 u_{tt}(t,x) &= a(0)u_{xx}(t,x) + \int_{-\infty}^{t} a'(t-\tau)u_{xx}(\tau,x)\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \rho_0 b(t,x).\end{aligned} \tag{4.1}$$

为简单计, 设 $\rho_0 \equiv 1$ 及 $b \equiv 0$. 如果 $a(\tau)$ 满足条件 (3.56), 则 $a(\tau)$ 为单调减少的非负函数, $a'(\tau)$ 为单调增加的非正函数. 设 $\tau \to +\infty$ 时

$$a(\tau) \to c, \tag{4.2}$$

其中 $c \geqslant 0$, 就有

$$\int_{-\infty}^{t} a'(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -a(0) + c. \tag{4.3}$$

这样, 方程 (4.1) 可以写为

$$u_{tt}(t,x) = cu_{xx}(t,x) + \int_{-\infty}^{t} m(t-\tau)(u_{xx}(t,x) - u_{xx}(\tau,x))\mathrm{d}\tau, \tag{4.4}$$

其中 $m(\tau) = -a'(\tau)$.

现在我们直接从积分—偏微分方程 (4.4) 出发, 考察其核 $m(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处的 (甚至可能不可积的) 奇性对解的影响. 在此, 假定 $c \geqslant 0$ 为常数, $m(\tau) \neq 0$ 为单调减少并在无穷远处可积的非负函数, 且 $\tau m(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处可积.

讨论方程 (4.4) 的瑞利 (Rayleigh) 问题, 即在第一象限 $\{(t,x)\mid t>0, x>0\}$ 中求方程 (4.4) 的解 $u(t,x)$, 使其满足如下的定解条件:

$$u(t,x)=0, \quad \text{当 } t\leqslant 0,\ x>0 \text{ 时}, \tag{4.5}$$

$$u(t,0)=1, \quad \text{当 } t>0 \text{ 时}. \tag{4.6}$$

现利用拉普拉斯变换方法来求解上述瑞利问题. 以 $\hat{u}(s,x)$ 与 $\widehat{m}(s)$ 分别表示函数 $u(t,x)$ 与 $m(t)$ 关于变量 t 的拉普拉斯变换, 即

$$\hat{u}(s,x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}u(t,x)\mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

$$\widehat{m}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}m(t)\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

对方程 (4.4) 关于变量 t 作拉普拉斯变换, 并注意到

$$\begin{aligned}\hat{u}_{tt}(s,x) &= s^2\hat{u}(s,x)-su(0,x)-u_t(0,x)\\ &= s^2\hat{u}(s,x)\end{aligned} \tag{4.9}$$

(这儿利用了 (4.5) 式) 及

$$\left(\int_0^t m(t-\tau)u(\tau,x)\mathrm{d}\tau\right)^{\wedge}(s,x)=\widehat{m}(s)\hat{u}(s,x), \tag{4.10}$$

就得到

$$s^2\hat{u}(s,x)=(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))\hat{u}_{xx}(s,x), \tag{4.11}$$

其中 $c\geqslant 0$ 为方程 (4.4) 中的系数,

$$\widehat{m}(0)=\int_0^\infty m(t)\mathrm{d}t.$$

而边界条件 (4.6) 在拉普拉斯变换下则变为

$$\hat{u}(s,0)=\frac{1}{s}. \tag{4.12}$$

如果 $m(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处不可积, $\widehat{m}(0)$ 与 $\widehat{m}(s)$ 均不存在, 但注意到 $\tau m(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处可积, $\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)$ 仍可用下式定义:

$$\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)=\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-st})m(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\,\mathrm{Re}\,s\geqslant 0. \tag{4.13}$$

因此，即使 $m(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处不可积，(4.11) 式按上述理解仍是有意义的. 考虑到 $m(t)$ 非负且不恒为零，利用 (4.13) 式容易验证

$$\mathrm{Re}(\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))>0,\quad \forall\, \mathrm{Re}\, s\geqslant 0, s\neq 0. \tag{4.14}$$

此外，利用 $m(t)$ 的单调减少性，不难验证

$$\mathrm{sign}\ \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s_1 t} m(t)\sin s_2 t\mathrm{d}t\right)=\mathrm{sign}\ s_2,\quad \forall s_1\geqslant 0, s_2\in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

(参见习题 5). 于是，对 (4.13) 式取虚部易得

$$\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}(\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))=-\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\, s \tag{4.16}$$

按 (4.13) 式所示的意义理解，$\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)$ 在我们一开始关于 $m(t)$ 的假设下总是有意义的. 因此，对变量 x 的常微分方程 (4.11)，其满足条件 (4.12)，而且对给定的 $s\neq 0$, $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$, 关于 $x\geqslant 0$ 有界的解就可由下式给出：

$$\widehat{u}(s,x)=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x}. \tag{4.17}$$

于是，由拉普拉斯逆变换公式可得

$$\begin{aligned} u(t,x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{st}\widehat{u}(s,x)\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x-t)}\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 γ 为任一给定的正实数.

首先说明，在前述假设下，(4.18) 式右端的积分是有意义的. 利用 (4.14) 和 (4.16) 式，容易验证

$$\mathrm{Re}(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}>0,\quad \forall\, \mathrm{Re}\, s\geqslant 0, s\neq 0 \tag{4.19}$$

及

$$\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}=-\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\, s, \forall\, \mathrm{Re}\, s\geqslant 0, s\neq 0. \tag{4.20}$$

于是，

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{-s(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x}\right| \\
=\ & e^{-\operatorname{Re}s\operatorname{Re}(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x+\operatorname{Im}s\operatorname{Im}(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x} \\
\leqslant\ & 1, \quad \forall x\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

故由 $\widehat{u}(s,x)$ 的表达式 (4.17) 可得

$$|\widehat{u}(s,x)|\leqslant\frac{1}{|s|}, \quad \forall \operatorname{Re}s\geqslant 0, s\neq 0, x\geqslant 0. \tag{4.21}$$

记 $s=\gamma+\mathrm{i}\beta$. 由上式得

$$|\widehat{u}(s,t)|^2\leqslant\frac{1}{\gamma^2+\beta^2}.$$

这说明对固定的 $\gamma>0$, $\widehat{u}(s,x)$ 视为 s 的虚部 β 的函数属于 $L^2(\mathbb{R})$. 注意到 (4.18) 式中的积分可以改写为如下形式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}e^{st}\widehat{u}(s,x)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}e^{\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\beta t}\widehat{u}(\gamma+\mathrm{i}\beta,x)\mathrm{d}\beta,$$

由 L^2 函数的傅里叶变换理论知，(4.18) 式在下述意义下是有意义的：

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}e^{\gamma t}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e^{\mathrm{i}\beta t}\widehat{u}(\gamma+\mathrm{i}\beta,x)\mathrm{d}\beta, \tag{4.22}$$

其中的极限应理解为在 $L^2(\mathbb{R})$ 的意义下取的.

下面根据 $m(t)$ 在 $t=0$ 处奇性的不同情况，考察由 (4.18) 式给出的 $u(t,x)$ 的性质.

首先设 $m\in L^1(0,\infty)$. 此时，由黎曼—勒贝格 (Riemann-Lebesgue) 定理知，在 $\operatorname{Re}s\geqslant 0$ 时

$$\lim_{s\to\infty}\widehat{m}(s)=0, \tag{4.23}$$

于是在 $\operatorname{Re}s\geqslant 0$ 时，有

$$\lim_{s\to\infty}((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x-t)=\frac{x}{\sqrt{c+\widehat{m}(0)}}-t. \tag{4.24}$$

又因为在 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 时，(4.18) 式右端积分中的被积函数没有奇点，由柯西 (Cauchy) 定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{\gamma-\mathrm{i}\rho}^{\gamma+\mathrm{i}\rho}+\int_{\Gamma}\right)\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x-t)}\mathrm{d}s=0, \tag{4.25}$$

其中 Γ 为复平面上的圆 $|s-\gamma|=\rho$ 在直线 $s=\gamma$ 右边的部分 (见图 9).

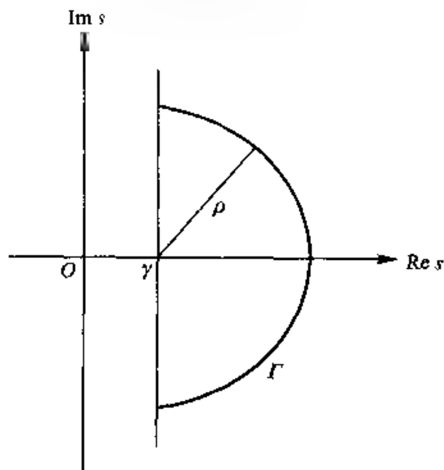


图 9

于是当

$$x > at \tag{4.26}$$

时，其中

$$a=\sqrt{c+\widehat{m}(0)}, \tag{4.27}$$

就得到

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x-t)}\mathrm{d}s=0, \tag{4.28}$$

从而由 (4.25) 式有

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma-\mathrm{i}\rho}^{\gamma+\mathrm{i}\rho}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}}x-t)}\mathrm{d}s=0. \tag{4.29}$$

再注意到 (4.18) 及 (4.22) 等式，就得到

$$u(t,x)\equiv 0, \quad 若\ x > at. \tag{4.30}$$

这说明在核 $m(t)$ 可积的情况，由积分—偏微分方程 (4.4) 所决定的线性波以有限速度 $a=\sqrt{c+\int_0^\infty m(t)\mathrm{d}t}$ 传播，具有双曲波的特性．但如果 $m(t)$ 在 $t=0$ 处不可积，就不能期望波仍具有有限传播速度．

先在 $m(t)$ 可积的情形，考察问题 (4.4)—(4.6) 的解沿直线 $x=at$ 的间断情况．首先假定 m 为正则核，即 $m\in C^\infty[0,\infty)$，并设其各阶导数亦均在 $[0,\infty)$ 上可积．此时，由 (4.8) 式并利用分部积分容易看出，当 $s\to\infty$ 时，$\widehat{m}(s)$ 可以表示为如下形式：

$$\widehat{m}(s)=\frac{m(0)}{s}+\frac{m'(0)}{s^2}+\cdots,\quad \mathrm{Re}\,s\geqslant 0, s\neq 0. \tag{4.31}$$

由此易得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-s(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{\frac{1}{2}}x}\\ =\ &\mathrm{e}^{-(c+\widehat{m}(0))^{\frac{1}{2}}sx-\frac{1}{2}m(0)(c+\widehat{m}(0))^{-\frac{1}{2}}x}+O\left(\frac{1}{s}\right)\end{aligned} \tag{4.32}$$

将其代入 (4.18) 右端，上式右端第一项在其中的贡献为

$$\begin{aligned}&v(t,x)\\ =\ &\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}m(0)(c+\widehat{m}(0))^{-\frac{1}{2}}x}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s((c+\widehat{m}(0))^{\frac{1}{2}}x-t)}\mathrm{d}s\\ =\ &\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}m(0)(c+\widehat{m}(0))^{-\frac{1}{2}}x}H(t-(c+\widehat{m}(0))^{\frac{1}{2}}x),\end{aligned} \tag{4.33}$$

其中 $H(\cdot)$ 为赫维赛德函数．这里利用了赫维赛德函数 $H(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\dfrac{1}{s}$ 的事实．此外，容易看出，将 (4.32) 右端第二项代入 (4.18) 式右端的积分中，给出的是一个 t 及 x 的连续函数．因此，问题 (4.4)—(4.6) 的解 $u(t,x)$ 在越过直线 $x=at$ 时有间断，且此间断的跃度为

$$A(t)=\exp\left(-\frac{m(0)t}{2(c+\widehat{m}(0))}\right) \tag{4.34}$$

由此可见，在上述关于 $m(t)$ 的假设下，随着 t 的增加，这个间断的跃度指数地衰减到零．在这种情况下，解的性态与具有耗散机制的双曲型偏微分方程的情况类似．

现在假设 $m(t)$ 在 $t=0$ 处具有可积性奇点．此时，虽然 $m(0)=\infty$，但 $\widehat{m}(0)$ 为有限，因而 $a<+\infty$，问题 (4.4)—(4.6) 的解 $u(t,x)$

仍具有有限传播速度 但 (4.34) 式启示我们，在这种情况下，$u(t,x)$ 在越过 $x \quad at$ 时应保持连续．也就是说，具有这种核的积分 偏微分方程 (4.4) 虽然仍保留波具有有限传播速度的这 -双曲型的特性，但同时也具有初始时刻的间断在瞬间即被磨光的这 -抛物型的特性．下面以由 (2.9) 式给出的函数

$$m(t) \quad \sum_{n \quad 1}^{\infty} e^{\quad n^{\alpha} t} \tag{4.35}$$

为例说明这 -点．由 (2.13) 式，$m(t)$ 在 $t \quad 0$ 附近的性态为

$$m(t) \sim t^{\quad \frac{1}{\alpha}}. \tag{4.36}$$

于是，在 $\alpha > 1$ 时，$m(t)$ 在 $t = 0$ 具有可积奇性，且其拉普拉斯变换为

$$\widehat{m}(s) - \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} + s}, \quad \forall \operatorname{Re} s \geqslant 0. \tag{4.37}$$

记 $f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^{\alpha} + s}$, $s \quad \gamma + \mathrm{i}\beta$. 容易验证

$$\left| \int_0^{\infty} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda \quad \sum_{n-1}^{\infty} f(n) \right| \leqslant \int_0^{\infty} |f'(\lambda)| \mathrm{d}\lambda \tag{4.38}$$

及

$$\int_0^{\infty} |f'(\lambda)| \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{|\beta|} \left(\frac{\pi}{2} \quad \arctan \frac{\gamma}{|\beta|} \right). \tag{4.39}$$

此外，还成立

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \frac{\pi}{\alpha} s^{\frac{1}{\alpha} \quad 1} \csc \frac{\pi}{\alpha} \tag{4.40}$$

(参阅 [10])．由 (4.37) (4.40) 式，我们得到

$$\left| \frac{\pi}{\alpha} s^{\frac{1}{\alpha} \quad 1} \csc \frac{\pi}{\alpha} - \widehat{m}(s) \right| \leqslant \frac{1}{|\beta|} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\gamma}{|\beta|} \right).$$

容易看出，当 s 在不包含负实轴的任 -角状区域中趋于无穷时，恒成立

$$\frac{1}{|\beta|} \left(\frac{\pi}{2} \quad \arctan \frac{\gamma}{|\beta|} \right) - O\left(\frac{1}{|s|} \right),$$

于是，相应地有

$$\widehat{m}(s) = \frac{\pi}{\alpha} s^{\frac{1}{\alpha}-1} \csc \frac{\pi}{\alpha} + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \tag{4.41}$$

因为对在有界范围内变化的 t 及 γ，e^{-st} 有界，再注意到当 $|\beta|$ 充分大时

$$\begin{aligned} & s(c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}} \\ = & (c+\widehat{m}(0))^{-\frac{1}{2}}\left(s+\frac{\pi \csc \frac{\pi}{\alpha}}{2\alpha(c+\widehat{m}(0))} s^{\frac{1}{\alpha}}+o(1) s^{\frac{1}{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

及

$$\operatorname{Re} s \geqslant |s|^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{2\alpha}.$$

将 $\widehat{m}(s)$ 的上述表达式代入 (4.18) 右端积分中的被积函数，就得到

$$\left|\frac{1}{s} e^{-s((c+\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s))^{-\frac{1}{2}} x-t)}\right| \leqslant M e^{-kx|s|^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{4.42}$$

其中 M 及 k 均为正常数. 这意味着，(4.18) 式右端积分中的被积函数在 $s \rightarrow \infty$ 时，衰减到零的速率较 $|s|^{-1}$ 的任意次幂都快，因此，问题 (4.4)—(4.6) 的解 $u(t,x)$ 在 $t>0$, $x>0$ 时是无穷次可微的. 这说明对这种在 $t=0$ 时具有可积奇性的核 $m(t)$，解在初始时刻的间断在瞬时即被磨光. 更深入的讨论可以说明：如果 $m(t)$ 在 $t=0$ 处具有更弱的奇性 (如对数奇性)，那么解 $u(t,x)$ 在 $x=at$ 上的光滑性将随之降低.

最后考察 $m(t)$ 在 $t=0$ 处具有不可积奇性的情况. 仍以由 (4.37) 式给出的函数 $m(t)$ 为例进行讨论. 在 $\frac{1}{2}<\alpha \leqslant 1$ 时，$m(t)$ 在 $t=0$ 处具有不可积奇性. 此时虽不能直接定义 $\widehat{m}(0)$ 与 $\widehat{m}(s)$，但由 (4.13) 式有

$$\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n^{\alpha}(n^{\alpha}+s)}. \tag{4.43}$$

为说明简单起见，下面只讨论 $\alpha=1$ 的情况，此时

$$\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right). \tag{4.44}$$

当 N 很大时，$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ 的性态像 $\ln N + C$, 即成立

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln N\right)=C, \tag{4.45}$$

其中 C 为欧拉常数. 令 $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda+s}$, 其中 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0,\ s\neq 0$. 不难验证

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_0^N f(\lambda)\mathrm{d}\lambda-\sum_{n=1}^{N}f(n)\right|\leqslant\int_0^\infty|f'(\lambda)|\mathrm{d}\lambda. \tag{4.46}$$

此外，容易直接验证 (4.39) 式在 $\alpha=1$ 时仍然成立. 由 (4.46) 及 (4.39) 式，成立

$$\lim_{N\to\infty}\left(\ln(N+s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+s}\right)=\ln s+O\left(\frac{1}{|s|}\right) \tag{4.47}$$

再注意到 (4.45) 式，就得到

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right)=\ln s+C+O\left(\frac{1}{|s|}\right), \tag{4.48}$$

即

$$\widehat{m}(0)-\widehat{m}(s)=\ln s+C+O\left(\frac{1}{|s|}\right). \tag{4.49}$$

这说明，(4.18) 式右端积分中的被积函数沿积分线路在 $|s|\to\infty$ 时，衰减得较 $|s|^{-1}$ 的任意次幂都快，因此，问题 (4.4)—(4.6) 的解 $u(t,x)$ 在 $t>0,\ x>0$ 时仍是无穷次可微的. 对 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 的情形，可以给出类似的结果. 更深入的讨论还说明：在 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时，解 $u(t,x)$ 实际上关于 t, x 在 $t>0,\ x>0$ 时是解析的. 这说明对核 $m(t)$ 在 $t=0$ 处具有不可积奇性的情况，瑞利问题 (4.4)—(4.6) 的解 $u(t,x)$ 非但初始间断在瞬间即可被磨光，解立刻变得非常光滑甚至解析；而且由于 $u(t,x)$ 解析，它在 $t>0,\ x>0$ 的任一区域中均不可能恒为零 (除非 $u(t,x)$ 恒为零), 从而波具有无穷的传播速度. 此时，方程 (4.4) 更接近抛物型偏微分方程.

以上讨论可以小结如下：

1° 若 m 在 $[0,\infty)$ 上是光滑的，解 $u(t,x)$ 的奇性以有限速度

$$a = \sqrt{c + \int_0^\infty m(t)\mathrm{d}t} \tag{4.50}$$

传播，且解沿 $x = at$ 的跃度指数地衰减到零.

2° 若 m 在 $t = 0$ 处可积，但 $m(0) = \infty$，传播速度仍为有限，但解的初始奇性瞬间即被抹去，解的光滑性依赖于 m 在 $t = 0$ 处奇性的程度.

3° 若 m 在 $t = 0$ 处具有不可积奇性，传播速度是无限的；解具有更高的光滑性，甚至解析.

这一节对线性情形的讨论提示我们，对非线性粘弹性动力学方程(组)，如果所含的核在 $t = 0$ 处具有奇性，那么其定解问题的解与纯弹性 (双曲型) 的情况相比，应有较高的光滑性等较好的性质. 对于弱解，已据此得到高维情况的整体存在定理 (见 [8], [9] 等). 至于能否得到在任意给定的初值 (不一定充分小) 下整体经典解的存在定理，即使对一维情况，也是一个没有得到解决的问题.

§5. 加速度波的传播

类似于上章对热弹性力学方程组那样，本节对粘弹性力学方程组的加速度波的传播进行讨论. 以如下一维粘弹性动力学方程为例予以考察：

$$u_{tt} = (g(u_x))_x + \int_{-\infty}^t m(t-\tau)(h(u_x(t,x),u_x(\tau,x)))_x \mathrm{d}\tau, \tag{5.1}$$

且假设 m 为正则核.

设 Γ 为 (t,x) 平面上的曲线

$$x = x(t). \tag{5.2}$$

若 u 在曲线 Γ 外适当光滑并满足方程 (5.1)，且 u 及其一阶偏导数 u_t 与 u_x 越过曲线 Γ 时连续，而 u 的二阶偏导数在 Γ 上有第一类间断，就称 Γ 为加速度波曲线.

设在加速度波传入之前，粘弹性体处于均匀变形状态，即

$$u = u_0, \quad \text{当 } x > x(t) \text{ 时}, \tag{5.3}$$

其中 u_0 为一常数 (见图 10)，且设加速度波由左向右传播，即 $x'(t) > 0$. 记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_\Gamma t} = \frac{\partial}{\partial t} + x'(t)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.4}$$

由 u_t 与 u_x 越过 Γ 的连续性，有

$$\left[\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}_\Gamma t}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}_\Gamma t}\right] = 0, \tag{5.5}$$

其中 $[\cdot]$ 表示所示函数越过 Γ 的跃度. 由 (5.5) 式分别得到

$$[u_{tt}] = -x'(t)[u_{xt}] \tag{5.6}$$

及

$$[u_{xt}] = -x'(t)[u_{xx}]. \tag{5.7}$$

由此就有

$$[u_{tt}] = (x'(t))^2[u_{xx}]. \tag{5.8}$$

利用假设 (5.3) 以及 u_x 越过 Γ 的连续性，由方程 (5.1) 可得

$$[u_{tt}] = \left(g'(0) + h_1(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\right)[u_{xx}], \tag{5.9}$$

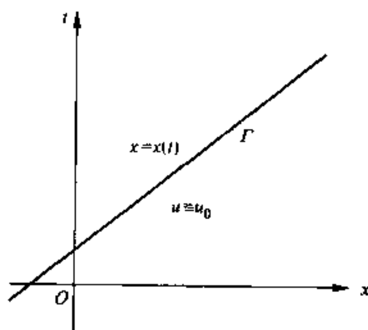


图 10

其中 $h_1(\cdot,\cdot)$ 表示 h 关于其第一个变量的偏导数. 比较 (5.8) 与 (5.9) 两式, 就得到

$$g'(0)+h_1(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s=(x'(t))^2. \tag{5.10}$$

由强椭圆性条件, 上式左端保持正值. 于是, 对向右传播的加速度波, 有

$$x'(t)=\sqrt{g'(0)+h_1(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s}\overset{\mathrm{d}}{=}V \tag{5.11}$$

为一正常数.

将方程 (4.1) 关于 t 求导一次, 得

$$\begin{aligned}u_{ttt} &= g'(u_x)u_{xxt}+g''(u_x)u_{xt}u_{xx}\\&\quad+m(0)(h_1(u_x,u_x)+h_2(u_x,u_x))u_{xx}\\&\quad+\int_{-\infty}^t m'(t-\tau)(h(u_x(t,x),u_x(\tau,x)))_x\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_{-\infty}^t m(t-\tau)(h(u_x(t,x),u_x(\tau,x)))_{xt}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $h_2(\cdot,\cdot)$ 表示 h 关于其第二个变量的偏导数. 利用假设 (5.3) 且注意到 (5.11) 式, 并假定

$$m(+\infty)=0, \tag{5.13}$$

在曲线 $x=x(t)$ 上, 由上方程易得

$$\begin{aligned}[u_{ttt}] &= V^2[u_{xxt}]\\&\quad+\left(g''(0)+h_{11}(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\right)[u_{xx}][u_{xt}]\\&\quad+m(0)h_2(0,0)[u_{xx}],\end{aligned} \tag{5.14}$$

其中 $h_{11}(0,0)$ 表示 h 关于其第一个变量的二阶偏导数. 易知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] = [u_{ttt}]+V[u_{xtt}], \tag{5.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{xt}] = [u_{xtt}]+V[u_{xxt}]. \tag{5.16}$$

再注意到 (5.6) 式，就得到

$$[u_{ttt}] = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{tt}] + V^2[u_{xxt}]. \tag{5.17}$$

将 (5.17)、(5.6) 及 (5.8) 式代入 (5.14) 式，就得到 u_{tt} 在 Γ 上的跃度

$$a(t) = [u_{tt}] \tag{5.18}$$

满足如下的微分方程：

$$a'(t) + \alpha a^2(t) + \beta a(t) = 0, \tag{5.19}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2V^3}\left(g''(0) + h_{11}(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\right), \tag{5.20}$$

$$\beta = -\frac{1}{2V^2}m(0)h_2(0,0) \tag{5.21}$$

方程 (5.19) 与第六章中的 (5.28) 式在形式上完全一样，因此，与第六章定理 5.1 类似，有如下定理.

定理 5.1. *对一维粘弹性动力学方程组 (5.1)，由 (5.3) 式给出的由左向右进入均匀变形状态的加速度波的振幅*

$$a(t) = \frac{\beta}{\left(\dfrac{\beta}{a(0)} + \alpha\right)e^{\beta t} - \alpha}, \tag{5.22}$$

其中 α 及 β 分别由 (5.20) 和 (5.21) 式给出. 此外,

1° 假设

$$m(0)h_2(0,0) < 0. \tag{5.23}$$

若

$$|a(0)| < \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \tag{5.24}$$

或

$$\operatorname{sign} a(0) = \operatorname{sign}\left(g''(0) + h_{11}(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\right), \tag{5.25}$$

则当 $t\to+\infty$ 时，$a(t)$ 指数地衰减到零，其衰减率与 $e^{-\beta t}$ 相同.

2° 假设

$$g''(0)+h_{11}(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\neq 0. \tag{5.26}$$

若

$$|a(0)|>\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \tag{5.27}$$

且

$$\operatorname{sign} a(0)=\operatorname{sign}\left(g''(0)+h_{11}(0,0)\int_0^\infty m(s)\mathrm{d}s\right), \tag{5.28}$$

则当 $t\to t_\infty$ 时，$a(t)\to\infty$，其中

$$t_\infty=-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha a(0)}\right). \tag{5.29}$$

下面对这个定理的条件及其结论的意义作一简单的说明．由定理 2.2，相应于方程 (5.1) 的本构关系为耗散的充分必要条件是

$$m'(\tau)\int_\eta^\xi h(\zeta,\eta)\mathrm{d}\zeta\leqslant 0,\quad \forall\xi,\eta\in\mathbb{R},\tau\geqslant 0. \tag{5.30}$$

由此立即可见，$m'(\tau)$ 应保持确定的符号．不失一般性，设

$$m'(\tau)\geqslant 0,\quad \forall\tau\geqslant 0. \tag{5.31}$$

假设 $m(+\infty)=0$ (见 (5.13) 式)，将上式由 τ 到 $+\infty$ 积分，就得到

$$m(\tau)\leqslant 0,\quad \forall\tau\geqslant 0. \tag{5.32}$$

此外，由 (5.30) 和 (5.31) 式可见

$$\int_\eta^\xi h(\zeta,\eta)\mathrm{d}\zeta\leqslant 0,\quad \forall\xi,\eta\in\mathbb{R} \tag{5.33}$$

再注意到 $h(\eta,\eta)=0$，立即可得 $h(\xi,\eta)$ 关于 ξ 至少在 η 附近是单调减少的，即成立

$$h_1(\xi,\eta)\leqslant 0,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}，\text{且在 }\eta\text{ 附近}. \tag{5.34}$$

这样，注意到由 $h(\eta,\eta)=0$ 有 $h_2(0,0)=-h_1(0,0)$，由 (5.32) 与 (5.34) 可以看出，(5.23) 式实际上体现了耗散不等式的要求. 此时由定理 5.1 的结论 1°，在适当的耗散假设下，若解的初始间断跃度充分小，则随着时间的增加，该间断将指数地衰减到零. 这一结论提示我们：粘弹性动力学方程组在适当的耗散假设下，对于充分小的初值，有可能存在整体经典解. 另一方面，条件 (5.26) 则是保证方程 (5.1) 在 $u_t=u_x=0$ 时为真正非线性的条件. 定理 5.1 的结论 2° 提示我们：在真正非线性的条件下，对于适当大的初值，方程 (5.1) 的经典解可能在有限时间内破裂. 上述关于粘弹性动力学方程的加速度波传播的结果也是由柯尔曼和哥丁于 20 世纪 60 年代中期得到的 (见 [7]). 随后的研究已部分地证实了上面的这些猜测. 对于一维情况，可参阅 [2] 及所附的参考文献. 对于高维情况的方程组，近年来也已有一些结果.

习 题

1. 对于由图 11 给出的由 N 个麦克斯韦模型与一个单独的弹簧并联给出的粘弹性模型，试证明其应力—应变关系为

$$\sigma(t)=k_s\varepsilon(t)+\sum_{i=1}^{N}k_i\int_{-\infty}^{t}e^{-\lambda_i(t-\tau)}\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}d\tau,$$

其中 $\lambda_i=k_i/\mu_i\ (i=1,2,\cdots,N)$.

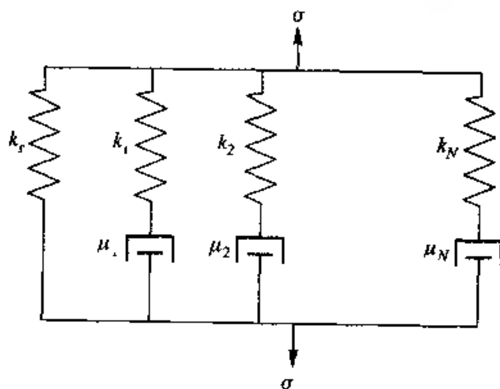


图 11

2. 利用麦克斯韦模型与开尔文模型的本构方程确定由图 12 所示的麦克斯韦—开尔文组合模型的本构方程.

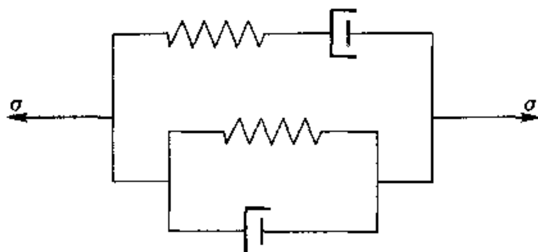


图 12

3. 证明：对于任一给定的单积分形式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}^t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(t)) + \int_0^\infty \boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t-\tau))\mathrm{d}\tau,$$

总可将其改写，使其核 $\boldsymbol{H}(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 满足假设 (A_1).

4. 证明引理 2.3.

5. 设 $m(t)$ 为 $(0, +\infty)$ 中单调减少的非负函数，且对任意给定的 $\rho > 0$, $m \in L^1(\rho, \infty)$. 又设 $tm(t)$ 在 $t = 0$ 处可积. 证明

$$\int_0^\infty m(t) \sin st\mathrm{d}t \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, s \geqslant 0.$$

6. 设 $a \in L^1(0, \infty)$. 证明 a 为强正定的充分必要条件是：存在 $\varepsilon > 0$, 使

$$\mathrm{Re}\, \widehat{a}(\mathrm{i}\xi) \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\xi^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

其中 $\widehat{a}$ 表示 a 的拉普拉斯变换.

7. 设 $a, a', a'' \in L^1(0, \infty)$, 且 a 是强正定的. 证明

$$a(0) > 0, \quad a'(0) < 0.$$

8. 讨论如下具有非局部型边界条件的初–边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = (\phi(u_x))_x + \displaystyle\int_0^t a'(t-\tau)(\psi(u_x(\tau, x)))_x \mathrm{d}\tau, 0 < x < l, \\ \left(\phi(u_x) + \displaystyle\int_0^t a'(t-\tau)\psi(u_x(\tau, x))\mathrm{d}\tau\right)\Big|_{x=0,l} = 0, \\ u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \end{cases}$$

其中 u^0 及 u^1 为给定的函数. 设 a 为正则的正定核, $\phi(0)=\psi(0)=0$, 且 $\psi'(\xi)>0$, $\phi'(\xi)>a(0)\psi'(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$. 证明这一问题的边界条件可化为局部型的, 即等价于

$$u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0.$$

9. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$ 为以耗散型单积分形式 (2.18) 为本构方程的非线性粘弹性动力学方程组 (3.32) 的解, 并在 $\partial\Omega$ 上满足边界条件

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

又设体积力 $\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0}$. 证明

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega|\boldsymbol{y}_t(t,\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega l(\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega\int_0^\infty m(\tau,\nabla\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\boldsymbol{y}(t-\tau,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\end{aligned}$$

为该问题的李雅普诺夫 (Lyapunov) 泛函, 即成立

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0,\quad\forall t\in\mathbb{R},$$

其中

$$l(\boldsymbol{\xi})=\int_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta},\quad m(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\int_{\boldsymbol{\eta}}^{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{H}(\tau,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}.$$

10. 写出各向同性线性粘弹性力学方程组 (3.26) 的各种定解问题.

11. 设 $\psi(\xi)$ 为连续可微函数, 且

$$\int_\eta^\xi(\psi(\zeta)-\psi(\eta))\mathrm{d}\zeta\geqslant 0,\quad\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

证明

$$\psi'(\xi)\geqslant 0,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}.$$

12. 验证 (4.38) 式.

参考文献

[1] 克里斯坦森 R M. 粘弹性力学引论. 郝松林, 老亮译. 北京: 科学出版社, 1990

[2] Renardy M, Hrusa W J & Nohel J A. *Mathematical Problems in Viscoelasticity*. Longman Scientific & Technical, 1987

[3] Doi M & Edwards S F. *Dynamics of concentrated polymer systems*, Part 1. J. Chem. Soc. Farady II 74(1978). 1789~1801; Part 2. 1802~1817; Part 3. 1818~1832; Part 4. 75(1979). 38~44

[4] Coleman B D. *Thermodynamics of materials with memory*. Arch. Rat. Mech. Anal., 17(1964). 1~46

[5] Gurtin M E & Hrusa W J. *On energies for nonlinear viscoelastic materials of single integral type*. Quart. Appl. Math., 46(1988). 381~392

[6] Gurtin M E & Hrusa W J. *On the thermodynamics of viscoelastic materials of single integral type*. Quart. Appl. Math., 49(1991). 67~85

[7] Coleman B D & Gurtin M E. *Waves in materials with memory III, Thermodynamic influences on growth and decay of acceleration waves*. Arch. Rat. Mech. Anal., 19(1965). 266~298

[8] Engler H. *Weak solution of a class of quasilinear hyperbolic integro differential equations describing viscoelastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., 113(1991). 1~38

[9] Qin T H. *Global existence of weak solutions to the boundary value problem for a three dimensional viscoelastic dynamic system*. J. Elasticity, 42(1996). 99~114

[10] Gradshteyn I S & Ryzhik L M. *Table of Integral, Series and Products*. Academic Press, 1980

[11] Doetsch G. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer-Verlag, 1974

[12] Gripenberg G, Londen S-O & Staffans O. *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge University Press, 1990

第八章　气体分子运动论

§1. 引　言

在第二章及其后的两章中我们从宏观的角度研究了流体动力学. 在那里，我们考察的对象不是流体个别分子的微观性质，而是由大量分子组成的流体微团的宏观性质. 然而，流体的宏观运动状态本质上应该是由流体分子的微观运动状态所决定的，只有从微观这一个更深的层次观察问题，才能进一步看清问题的本质.

在本章中，我们将从分子的微观现象出发，阐明气体的输运过程. 这不仅是研究稀薄气体动力学的重要基础，而且在此基础上，可将气体动力学的宏观现象作为一种特殊的极限情况来加以处理，由此可以看出各种近似的有效范围. 这也自然地给出了如何决定粘性系数、导热系数以及状态方程的方法

下面，先作一些一般性的描述.

已知在常温常压下，宏观的气体样品中包含大量的分子. 例如，在标准状况下，即压强 $p = 1$ 气压 (约合 1.013×10^5 Pa)，温度 $T = 273$ K (即 0°C) 时，一立方厘米空气中的分子数为

$$n \approx 2.69 \times 10^{19}.$$

这一庞大的数字启示我们，对气体个别分子作详细的动力学描述，不仅没有可能，而且没有必要. 从实用的观点看，对大量单个分子的运动作平均，采用统计描述应该是合理的.

在标准状况下，空气中分子间的平均距离是

$$r_0 \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \approx 3 \times 10^{-7}(\mathrm{cm}).$$

这和分子尺寸 (近似等于 0.53×10^{-8} cm) 相比要大得多. 因此，除碰撞外，气体分子间的相互作用力可以忽略不计，而且分子间发生碰撞的

可能性也比较小，可以忽略三个或三个以上分子同时发生碰撞的可能性，而只从分子间成对发生相互作用的角度来考虑分子碰撞的效应.

一般说来，研究微观粒子的运动和碰撞要利用量子力学 (参见第十章)，但实际上，对于气体动力学中的许多应用问题，用经典力学已经是足够了. 本章就利用经典力学的办法，确定每次碰撞的分子轨道，作出分子的输运方程，并由此求得热力学及流体动力学的一些基本关系式.

§2. 玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程

2.1. 分布函数

假定只存在一种分子. 对任一时刻 t, 可由其位置 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 及速度 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$ 来描述一个分子的状态. 为了描述分子的分布状况，引入*分布函数*

$$f=f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}),$$

其意义如下：在时刻 t, 位置落在 $\boldsymbol{x}$ 附近的一个微元体积 $\mathrm{d}x$ 中，而速度在 $\boldsymbol{v}$ 附近的一个微元体积 $\mathrm{d}v$ 中的分子的平均数目是

$$\mathrm{d}N=f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v, \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 及 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3$. 于是，$f$ 是在时刻 t, 在 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 处单位体积及单位速度变化范围中的分子数. 这是一个密度分布函数. 这里，“平均”意味着通过对许多相同的测量分子分布的实验结果取平均来给出函数 f.

若分布函数 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 为已知，就可以由它决定出许多宏观的量. 例如，在给定体积 V 中的分子总数为

$$N=\int_V \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{2.2}$$

再由 f 的定义，t 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 处单位体积内的分子总数为

$$n(t, \boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^3} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{2.3}$$

于是，所考察的气体在 t 时刻、$\boldsymbol{x}$ 处的密度为

$$\rho(t, \boldsymbol{x})=nM=M\int_{\mathbb{R}^3} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}v, \tag{2.4}$$

其中 M 为分子的质量，而在 t 时刻、 $\boldsymbol{x}$ 处的平均速度 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})=(V_1,V_2,V_3)$ 则由

$$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{v}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = \frac{\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{v}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v}{\int_{\mathbb{R}^3}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v} \tag{2.5}$$

来决定.

此外，在气体分子论中，在 t 时刻、 $\boldsymbol{x}$ 处的温度 $T(t,\boldsymbol{x})$ 由

$$\frac{3}{2}nkT(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2 f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \tag{2.6}$$

决定，其中 n 及 $\boldsymbol{V}$ 分别由 (2.3) 及 (2.5) 式给出， M 为分子的质量，而

$$k = 1.380\times10^{-23}\mathrm{J/K}$$

是玻尔兹曼常量. 下面将会看到，对于处于热力学平衡态的理想气体，(2.6) 式就化为通常的温度的定义；而即使对于非平衡态的气体，也由 (2.6) 式给出温度的定义.

(2.6) 式的右边表示每单位体积的热能. 事实上， $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}$ 是扣除了宏观速度后的分子运动速度， $\frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2$ 为单个分子的动能，而 $f\mathrm{d}v$ 为对每单位体积、速度在微元体积 $\mathrm{d}v$ 中的分子数. 因此，(2.6) 式右端为单位体积中分子热运动的能量，它应是温度的函数. 这隐含着所论的气体为理想气体.

至于在时刻 t 、 $\boldsymbol{x}$ 处的压力张量则定义为

$$p_{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3}M(v_i-V_i)(v_j-V_j)f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \quad (i,j=1,2,3). \tag{2.7}$$

以后将看到，它与我们在第二章 §2 中定义的应力张量相差一个负号.

在很多我们感兴趣的情况， f 关于变量 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}$ 基本上是球对称的，因为坐标的取向对 f 几乎没有什么影响，在将 $\boldsymbol{v}$ 减去平均速度 $\boldsymbol{V}$ 后，就不再有优势的方向. 特别，当 f 只是 $|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2$ 的函数时，注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3}u_iu_jf(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\mathrm{d}u = 0,\quad 若\ i\neq j,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2 f(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^3} u_2^2 f(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^3} u_3^2 f(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\mathrm{d}u,$$

易知

$$p_{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & 若\ i \neq j, \\ p(t,\boldsymbol{x}), & 若\ i = j, \end{cases} \tag{2.8}$$

且注意到 (2.6) 式，有

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} p_{ii} = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2 f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \\ &= nkT(t,\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

这正好相应于理想气体的情形. 这也说明，上述讨论的适用范围是理想气体.

最后，在 t 时刻， $\boldsymbol{x}$ 处单位体积的总能量是

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2}|\boldsymbol{v}|^2 f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2}(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2 + 2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V} + |\boldsymbol{V}|^2) f\mathrm{d}v \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2}|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2 f\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}^3} M(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V})f\mathrm{d}v \\ &-\frac{M}{2}|\boldsymbol{V}|^2\int_{\mathbb{R}^3} f\mathrm{d}v \\ =\ &\frac{3}{2}nkT + nM|\boldsymbol{V}|^2 - \frac{1}{2}nM|\boldsymbol{V}|^2 \\ =\ &\frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里我们利用了 (2.6) 、 (2.5) 及 (2.3)—(2.4) 式. 总能量是内能和宏观动能之和. 注意到 $\frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}\frac{kT}{M}\rho$, 单位质量的内能为

$$e = \frac{3}{2}\frac{kT}{M} \tag{2.11}$$

2.2. 玻尔兹曼方程

为了决定分布函数 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, 并论述关于气体非平衡性质的普遍理论, 我们要建立 f 满足的方程 —— 玻尔兹曼方程. 这是分子数守恒定律在数学上的描述.

为了得到这个方程, 考察时刻 t 处于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 状态的分子的运动. 设作用在分子上的外力为 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ (往往可假设它与 $\boldsymbol{v}$ 无关, 因为外力通常是宏观作用的), 于是作用在单个分子每单位质量上的作用力为

$$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})}{M}. \tag{2.12}$$

在一个时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中, 设分子间不发生碰撞, 于是原先在 t 时刻处于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 的分子, 在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻就将处于 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$, 其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\mathrm{d}t, \\ \boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.13}$$

相应地, 在 t 时刻处于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 内的所有分子, 在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻就会由于运动而处于 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ 的体积微元 $\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'$ 中. 注意到

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}v' = \left|\det \frac{\partial(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')}{\partial(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}v,$$

而变换 (2.13) 的雅可比行列式 $\det \dfrac{\partial(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')}{\partial(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})}$ 为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{d}t \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_3}\mathrm{d}t & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3}\mathrm{d}t & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}\mathrm{d}t & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_3}\mathrm{d}t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + O(\mathrm{d}t^2)$$

不计在今后讨论中不起作用的高阶小量, 就有

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}v' = \mathrm{d}x\mathrm{d}v \tag{2.14}$$

于是，在 t 时刻、在 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中的分子数为

$$\mathrm{d}N = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v, \tag{2.15}$$

而在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻、在 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ 处的相应体积微元中的分子数则为

$$\mathrm{d}N' = f(t + \mathrm{d}t, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')\mathrm{d}x\mathrm{d}v. \tag{2.16}$$

如果分子间不发生相互作用 (碰撞), 那么 t 时刻在 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 处的体积微元内的所有分子，在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻都会运动到 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ 处的相应体积微元之内，从而有

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N'. \tag{2.17}$$

但实际上,由于有分子间的相互作用(碰撞)，一方面有些原先不在$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 内的分子会散射到 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ 处的相应体积微元内；另一方面，原先在 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 内的有些分子也会散射到 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')$ 处的相应体积微元之外. 于是，(2.17) 式一般并不成立，而应代之以

$$\mathrm{d}N' - \mathrm{d}N = J\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}v \tag{2.18}$$

上式右端表示由于散射而引起的粒子在体积微元内的净增益，它应和 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v$ 及 $\mathrm{d}t$ 成正比，故有上述形式，而 J 将在下文中决定.

由 (2.15)、(2.16) 及 (2.13) 式，不计高阶小量，就有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}N' - \mathrm{d}N \\
= \ & f(t + \mathrm{d}t, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}')\mathrm{d}x\mathrm{d}v - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\
= \ & (f(t + \mathrm{d}t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\mathrm{d}t, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\mathrm{d}t) - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}))\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\
= \ & \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x f + \boldsymbol{g} \cdot \nabla_v f\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中记

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

及

$$\nabla_v = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3}\right).$$

由 (2.18) 和 (2.19) 式，就得到 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 应满足的偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v f=J. \tag{2.20}$$

它称为**玻尔兹曼方程**.

在上述方程中，可将其右端 J 写为

$$J=J_+-J_-. \tag{2.21}$$

其中 J_+ 与 J_- 的意义如下：$J_-\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 表示在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中因为碰撞而离开原先考察的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 的分子总数，即具有下述性质的碰撞的次数，其中两个碰撞分子中有一个开始在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中；而 $J_+\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 表示在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中因为碰撞而进入原先考察的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 的分子总数，即具有下述性质的碰撞的次数，其中两个碰撞分子碰撞后有一个落在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中. 这样，J 就是在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间内粒子在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 处的体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中的净增益数. J 称为**碰撞项**.

为了决定 J_+ 及 J_-，必须先具体地研究碰撞的性质.

2.3. 二体碰撞

我们考察两个具有相等质量且无内部结构的分子在自由空间中的**弹性碰撞**. 每个分子的状态由其位置及速度来描述.

设两分子碰撞前的速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$，而碰撞后的速度分别为 $\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{w}'$. 由动量及能量守恒定律，有

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}' \tag{2.22}$$

及

$$|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}'|^2+|\boldsymbol{w}'|^2. \tag{2.23}$$

令

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),\quad \overline{\boldsymbol{v}}'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}')$$

及

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{u}'=\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}',$$

(2.22)—(2.23) 式可改写为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}', \tag{2.24}$$

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}'|. \tag{2.25}$$

事实上, (2.22) 与 (2.24) 是完全等价的. 又由 (2.22) 式, 有

$$|\boldsymbol{v}|^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} + |\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}'|^2 + 2\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{w}' + |\boldsymbol{w}'|^2.$$

注意到 (2.23) 式, 上式给出

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{w}'.$$

从而

$$|\boldsymbol{v}|^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} + |\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}'|^2 - 2\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{w}' + |\boldsymbol{w}'|^2,$$

这就是 (2.25) 式. 反过来的推导也是显然的.

由 (2.24)—(2.25) 式可以看到: 弹性碰撞不改变平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}' = \bar{\boldsymbol{v}}$; 而 $\boldsymbol{u}'$ 仅为 $\boldsymbol{u}$ 的一个旋转, 其大小不变. 于是, 给定 $\bar{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{u}$ 以及 $\boldsymbol{u}'$ 对 $\boldsymbol{u}$ 的旋转角 (θ, ϕ) 就完全决定了碰撞 (见图 1). 角 θ 及 ϕ 称为散射角.

图 1

若 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 及 $\boldsymbol{u}$ 分别在其附近的微元 $\mathrm{d}\overline{v}$ 及 $\mathrm{d}u$ 中变动，而散射角 θ 及 φ 保持不变，则碰撞后的量 $\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{u}'$ 也将在其相应的微元 $\mathrm{d}v'$ 及 $\mathrm{d}u'$ 中变动. 由于 $\overline{\boldsymbol{v}}=\overline{\boldsymbol{v}}'$, 故 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}'$. 再由于 θ,φ 保持不变，又有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{u}|=|\mathrm{d}\boldsymbol{u}'|$. 这样，就有

$$\mathrm{d}\overline{v}\mathrm{d}u=\mathrm{d}v'\mathrm{d}u'. \tag{2.26}$$

此外，利用 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{u}$ 的定义，通过直接计算易知

$$\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{2.27}$$

类似地，有

$$\mathrm{d}\overline{v}'\mathrm{d}u'=\mathrm{d}v'\mathrm{d}w'. \tag{2.28}$$

因此，若稍许改变 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$, 但保持散射角不变，那么 $\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{w}'$ 将也作稍许的改变，且成立

$$\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\mathrm{d}v'\mathrm{d}w'. \tag{2.29}$$

这儿，平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 并不是一个特别重要的量. 事实上，在一个以均匀速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 平移的新坐标系下，仅需考虑相对速度 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{u}'$. 这一坐标系称为质心坐标系.

碰撞过程在实验室坐标系 (即观察者所处的坐标系) 及质心坐标系中的表示可分别见图 2 及图 3.

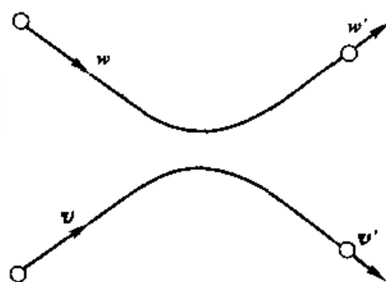


图 2

在质心坐标系下，仅需集中精力考虑一个碰撞分子，因为另一个和它碰撞的分子与其有相反的速度. 这样，问题就等价地化为一个分子

对一个假想的固定力心 O 的散射问题. 一个分子以速度 $\boldsymbol{u}$ 迫近 O 点(见图 4), 其入射轨道与 O 点的垂直距离 b 称为碰撞参数. 取 O 点为坐标原点, 并取 ξ_3 轴与 $\boldsymbol{u}$ 的方向平行. 因为 $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}'|$, 该分子最后的状态由两个散射角 θ 和 ϕ 决定. 其中 θ 为 $\boldsymbol{u}'$ 与 ξ_3 轴的夹角, 而 ϕ 为 $\boldsymbol{u}'$ 关于 ξ_3 轴的方位角. 下面将 θ 与 ϕ 一起记为 Ω.

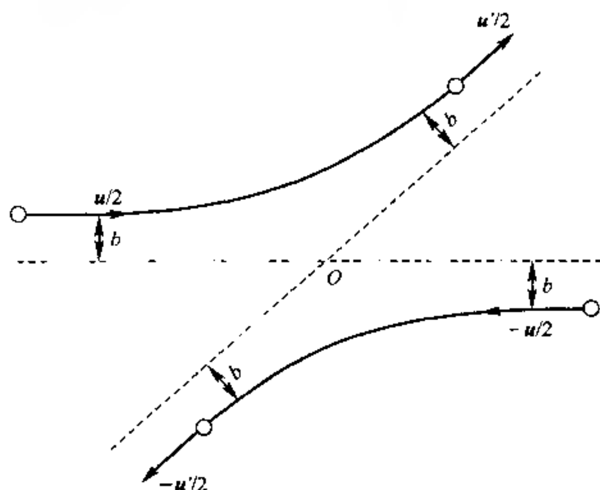


图 3

下面引入微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 这一重要的概念.

我们看到, 碰撞的初始速度 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 并不能唯一决定碰撞, 因为它们不能决定碰撞参数 b. 给定 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$, 由于 $\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ 给定, 相当于给定了一类碰撞, 它们具有同样的质心系. 这一类碰撞由相应于所有可能的碰撞参数 (因而所有可能的散射角) 的碰撞所组成. 为了描绘这一类碰撞, 可想像一均匀分布在空间、且具初始速度 $\boldsymbol{u}$ 的分子射束入射到力心 O 上, 见图 4.

设 I 为单位时间 (秒) 内通过垂直于射束的单位面积的入射束中的分子数, 称为入射流. 微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 就由下式定义:

$$I\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \text{单位时间内由于散射而偏转到围绕 } \Omega \text{ 的立体角 } \mathrm{d}\Omega \text{ 中的分子数.} \tag{2.30}$$

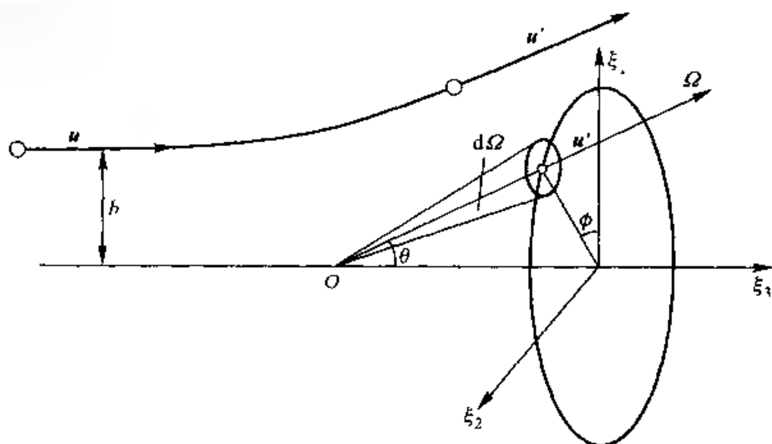


图 4

微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 有面积的量纲. 其几何意义如下:

$$
\frac{\text{单位时间内散射偏转到 } [\Omega, \Omega + \mathrm{d}\Omega] \text{ 中的分子数}}{\text{单位时间内入射束越过垂直于射束面积 } \sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega \text{ 的分子数}}.
$$

$\sigma(\Omega)$ 对所有立体角元素的积分

$$
\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{2.31}
$$

称为*总截面*. 这里, 无论是 $\sigma(\Omega)$ 还是 σ_{tot} 均应理解为与 $|\boldsymbol{u}|$ 有关.

微分散射截面是一个可以直接通过实验测量的量. 若内部分子势为已知, $\sigma(\Omega)$ 也可以通过计算的方法得到, 但必须利用量子力学的方法. 这是因为在碰撞过程中, 分子之间要重叠, 已不能用经典力学的办法处理. 这里, 我们假设对所考虑的气体, $\sigma(\Omega)$ 已给定.

现在记

$$
\sigma(\Omega) = \sigma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \to \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'),
$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 为分子碰撞前的速度, $\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{w}'$ 为碰撞后的速度, 而 Ω 则为 $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{v}'$ 之间的夹角及方位角.

$\sigma(\Omega)$ 有如下的对称性质.

(a) 对时间反演的不变性：

$$\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')=\sigma(-\boldsymbol{v}',-\boldsymbol{w}'\to-\boldsymbol{v},-\boldsymbol{w}). \tag{2.32}$$

这表示若将时间反演，每个分子将按它原先的路程返回.

(b) 对旋转及反射的不变性：

$$\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')=\sigma(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{w}^*\to\boldsymbol{v}'^*,\boldsymbol{w}'^*), \tag{2.33}$$

其中 $\boldsymbol{v}^*$ 等表示由 $\boldsymbol{v}$ 等分别经过同一个旋转或镜面反射而得的向量.

给定一个碰撞，可以定义它的反碰撞. 它由将原先碰撞的初始状态及结束状态互换而构成. 作为上述对称性的一个推论，可以证明：反碰撞与原碰撞具有同样的微分散射截面，即成立

$$\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')=\sigma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\to\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{2.34}$$

事实上，考虑如图 5 a) 所示的一个碰撞. 由性质 (a), 时间反演后微分散射截面不变，于是就有

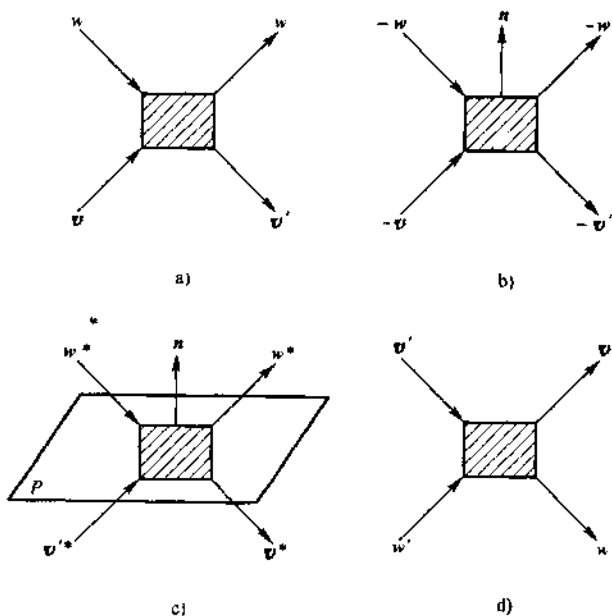


图 5

$$\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')=\sigma(-\boldsymbol{v}',-\boldsymbol{w}'\to-\boldsymbol{v},-\boldsymbol{w}),$$

见图 5 b). 取一适当的轴向 $\boldsymbol{n}$, 使它垂直于 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'$, 然后将图 5 b) 绕 $\boldsymbol{n}$ 旋转 π 角. 由性质 (b), 微分散射截面仍保持不变, 即成立

$$\sigma(-\boldsymbol{v}',-\boldsymbol{w}'\to-\boldsymbol{v},-\boldsymbol{w})=\sigma(\boldsymbol{v}'^*,\boldsymbol{w}'^*\to\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{w}^*).$$

这里 $\boldsymbol{v}^*$ 等是 $-\boldsymbol{v}$ 等分别经过上述旋转所得的向量, 见图 5 c). 再将图 5 c) 关于垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面 P 作一反射, 易见此时 $\boldsymbol{v}^*$ 及 $\boldsymbol{v}'^*$ 等分别相应地变为 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{v}'$ 等, 见图 5 d). 由性质 (b), 微分散射截面仍不变, 就有

$$\sigma(\boldsymbol{v}'^*,\boldsymbol{w}'^*\to\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{w}^*)=\sigma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\to\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).$$

这就证明了 (2.34) 式.

上述推导的关键在于: 任何一个向量 $\boldsymbol{v}$ 先绕轴 $\boldsymbol{n}$ 旋转 π 角, 然后对垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面作反射, 就变为 $-\boldsymbol{v}$. 再加一个时间反演, 就回到 $\boldsymbol{v}$. 当然, 此时该向量在图中的位置已发生了变化 (比较图 5 a) 及 d)).

2.4. 碰撞项 J 的决定

现在讨论如何决定玻尔兹曼方程 (2.20) 右端的碰撞项 J. 为此目的, 假设

(a) 只需考虑两个分子间的碰撞, 即设气体是相当稀薄的;

(b) 不考虑气体容器的壁面, 因这只对边界条件有影响;

(c) 不计外力对碰撞截面的影响;

(d) 各分子的运动状态 (其速度与位置), 在不发生碰撞时是互不关联的, 也就是说各分子的概率分布是相互独立的. 这称为分子混沌性假设. 它表示在 $\boldsymbol{x}$ 处的空间体积微元 $\mathrm{d}x$ 与在 $\boldsymbol{y}$ 处的空间体积微元 $\mathrm{d}y$ 中, 速度分别落在 $\boldsymbol{v}$ 附近的微元 $\mathrm{d}v$ 及 $\boldsymbol{w}$ 附近的微元 $\mathrm{d}w$ 中的分子对的数目为

$$(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v)(f(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\mathrm{d}y\mathrm{d}w). \tag{2.35}$$

现在来决定 (2.21) 式中的 J_-. 由前述, J_- 表示单位时间内、在单位体积元及单位速度元中由于碰撞而减少的分子数. 考察位置在 $\boldsymbol{x}$ 附近一微元 $\mathrm{d}x$, 而速度在 $\boldsymbol{v}$ 附近一微元 $\mathrm{d}v$ 中的分子. 在同一体积微

元 $\mathrm{d}x$ 中，在任何速度 $\boldsymbol{w}$ 附近的速度微元 $\mathrm{d}w$ 中的分子均可视为作用在速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子上的入射分子束. 注意到将靶心固定，入射分子束的相对速度为 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$, 易知此分子束的入射流

$$\begin{aligned} I &= \text{单位时间内通过垂直于 } \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v} \text{ 的单位面积上的入射} \\ &\quad\ \text{分子束中速度在 } \boldsymbol{w} \text{ 附近的微元 } \mathrm{d}w \text{ 中的分子数} \\ &= f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mathrm{d}w|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|. \end{aligned} \tag{2.36}$$

于是，由 (2.30) 式，在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内发生的碰撞 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$ 散射到围绕 Ω 的立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 中的分子数为

$$I\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mathrm{d}w|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t, \tag{2.37}$$

其中 $\sigma(\Omega)=\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ 为在质心坐标系下的微分散射截面，而 Ω 为 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'$ 之间的夹角与方位角.

将 (2.37) 式关于 $\boldsymbol{w}$ 与 Ω 积分，就得到在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中与一个速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子碰撞的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mathrm{d}t. \tag{2.38}$$

再考虑到在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 附近的微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中的分子数为

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v, \tag{2.39}$$

由分子混沌性假设 (见 (2.35) 式), 即得在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 附近的微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中由于碰撞而离开原先微元的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}t. \tag{2.40}$$

这样就得到

$$J_- = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}), \tag{2.41}$$

其中积分是关于 $\boldsymbol{w}$ 及散射角 Ω 进行的.

虽然上式右端关于 Ω 的积分可以直接写成总截面的形式:

$$\int\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \sigma_{tot}, \tag{2.42}$$

但为下文讨论的方便，仍采用 (2.41) 式那样看起来较为复杂的形式.

现在来决定 (2.21) 式中的 J_+. 考察形如 $\{\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\to\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ 的碰撞，其中 $\boldsymbol{v}$ 为固定，即是我们所考察的分子速度. 对一个速度为 $\boldsymbol{v}'$ 的分子，它经受速度为 $\boldsymbol{w}'$ 的分子束的入射，其入射流为

$$I = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\mathrm{d}w'|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'| \tag{2.43}$$

(参见 (2.36) 式). 因此，在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中，因此类碰撞而散射到围绕 Ω 的立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 中的分子数为

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\mathrm{d}w'|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'|\sigma'(\Omega)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t, \tag{2.44}$$

其中

$$\sigma'(\Omega)=\sigma(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\to\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{2.45}$$

将 (2.44) 式关于 $\boldsymbol{w}'$ 及 Ω 积分，即得在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，与速度为 $\boldsymbol{v}'$ 的分子碰撞的分子总数为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w'\int\mathrm{d}\Omega\sigma'(\Omega)|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\mathrm{d}t. \tag{2.46}$$

考虑到在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')$ 附近的微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v'$ 中的分子数为

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')\mathrm{d}x\mathrm{d}v', \tag{2.47}$$

就得到在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，由于碰撞而进入 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 附近的微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ 中的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w'\int\mathrm{d}\Omega\sigma'(\Omega)|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\mathrm{d}x\mathrm{d}v'\mathrm{d}t, \tag{2.48}$$

其中积分是关于 $\boldsymbol{w}'$ 及 Ω 进行的，而 $\boldsymbol{v}'$ 则是入射流的靶心.

由于反碰撞与原碰撞具有相同的微分散射截面 (见 (2.34) 式), 有

$$\sigma'(\Omega)=\sigma(\Omega), \tag{2.49}$$

其中 $\sigma(\Omega)=\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$. 又由 (2.25) 及 (2.29) 式，有

$$|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'|=|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \tag{2.50}$$

及

$$\mathrm{d}v'\mathrm{d}w' = \mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{2.51}$$

利用 (2.49)—(2.51) 式，由 (2.48) 式易得

$$J_+ = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}'). \tag{2.52}$$

在上式中，对于任意给定的 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{w}'$ 是 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 及 Ω 的函数.

将 (2.41) 及 (2.52) 代入 (2.21) 式，就得到碰撞项

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}') \\ &\quad - f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})), \end{aligned} \tag{2.53}$$

其中 $\sigma(\Omega)=\sigma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ 为微分散射截面.

这样，玻尔兹曼方程 (2.20) 就可具体写为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v\right)f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}') \\ &\qquad -f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})). \end{aligned} \tag{2.54}$$

这是一个关于分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 的非线性积分—微分方程. 研究气体分子运动论的问题就化为求解上述方程.

§3. 稀疏气体的平衡态

3.1. 玻尔兹曼 H 定理

玻尔兹曼方程 (2.54) 的与时间 t 无关的解称为平衡分布函数. 它也应是分布函数在 $t\to+\infty$ 时的极限状态.

假设不存在外力 ($\boldsymbol{g}=0$), 并相应地假设分布函数与 $\boldsymbol{x}$ 无关: $f=f(t,\boldsymbol{v})$. 此时的平衡分布函数记为 $f_0(\boldsymbol{v})$. 由玻尔兹曼方程 (2.54), $f_0(\boldsymbol{v})$ 应满足

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f_0(\boldsymbol{v}')f_0(\boldsymbol{w}') \\ -f_0(\boldsymbol{v})f_0(\boldsymbol{w}))=0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

于此，对于任意给定的 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$ 及 $\boldsymbol{w}'$ 是 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 及 Ω 的函数.

显然，若 $f_0(\boldsymbol{v})$ 满足

$$f_0(\boldsymbol{v}')f_0(\boldsymbol{w}') - f_0(\boldsymbol{v})f_0(\boldsymbol{w}) = 0, \tag{3.2}$$

其中 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$ 为一切可能的 (即具非零散射截面的) 碰撞，则 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为方程 (3.1) 的解，从而为玻尔兹曼方程 (2.54) 的平衡态解.

下面我们要证明：若 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为方程 (3.1) 的解，则它必满足 (3.2) 式. 于是在上述假设下，成立 (3.2) 式是 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的平衡态解的充要条件.

为证明这一点，按照玻尔兹曼的做法，定义泛函

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v f(t,\boldsymbol{v}) \ln f(t,\boldsymbol{v}), \tag{3.3}$$

于此，$f(t,\boldsymbol{v})$ 为相应的非平衡态 (依赖于时间 t!) 的分布函数. 由玻尔兹曼方程 (2.54), $f(t,\boldsymbol{v})$ 应满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,\boldsymbol{v})}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f(t,\boldsymbol{v}')f(t,\boldsymbol{w}') \\ &\quad - f(t,\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{w})).\end{aligned} \tag{3.4}$$

将 (3.3) 对 t 求导一次，得

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \frac{\partial f(t,\boldsymbol{v})}{\partial t}(1 + \ln f(t,\boldsymbol{v})). \tag{3.5}$$

由此得到：f 为平衡分布函数，即 $\dfrac{\partial f}{\partial t} \equiv 0$ 的必要条件为

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.6}$$

这样，下面我们只需证明 (3.6) 式与 (3.2) 式等价.

为此，先证明下述的

玻尔兹曼 H 定理 *若 $f(t,\boldsymbol{v})$ 满足玻尔兹曼方程 (2.54) (其中 $\boldsymbol{g} \equiv 0$), 则成立*

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0. \tag{3.7}$$

证明 将 (3.4) 代入 (3.5) 式，就得到

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \cdot(f_1'f_2'-f_1f_2)(1+\ln f_1), \tag{3.8}$$

其中简记 $f_1=f(t,\boldsymbol{v})$, $f_1'=f(t,\boldsymbol{v}')$ 等.

注意到交换 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 不改变 $\sigma(\Omega)$ 之值 (因碰撞的两个分子未变化), 由上式易得

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \cdot(f_1'f_2'-f_1f_2)(1+\ln f_2). \tag{3.9}$$

将 (3.8) 与 (3.9) 两式相加，有

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \cdot(f_1'f_2'-f_1f_2)(2+\ln(f_1f_2)). \tag{3.10}$$

将上式右端积分中的 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$ 互换，可得

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v'\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w'\int\mathrm{d}\Omega\sigma'(\Omega)|\boldsymbol{w}'-\boldsymbol{v}'| \cdot(f_1f_2-f_1'f_2')(2+\ln(f_1'f_2')) \tag{3.11}$$

由于每一碰撞 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}\to\{\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$ 均有一逆碰撞 $\{\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}\to\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$, 且它们有相同的微分散射截面:

$$\sigma'(\Omega)=\sigma(\Omega) \tag{3.12}$$

(见 (2.34) 式), 并注意到 (2.25) 及 (2.29) 式, (3.11) 式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \cdot(f_1f_2-f_1'f_2')(2+\ln(f_1'f_2')). \tag{3.13}$$

将上式与 (3.10) 式相加，就得到

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \cdot(f_1'f_2'-f_1f_2)(\ln(f_1f_2)-\ln(f_1'f_2')) \tag{3.14}$$

由于 $\ln x$ 在其定义域中是一个严格单调增加的函数，有

$$(b-a)(\ln b-\ln a)\geqslant 0,\quad \forall a,b>0, \tag{3.15}$$

因此 (3.14) 式右端积分中的被积函数不可能取正值，从而 (3.7) 式成立．证毕．

作为上述证明的一个副产品，不难看出：(3.6) 式当且仅当 (3.14) 式右端的被积函数恒为零，即

$$f_1'f_2'-f_1f_2=0 \tag{3.16}$$

时成立．由此立刻得到 (3.6) 式与 (3.2) 式等价的结论．

由此也可以想见，当 $t\to+\infty$ 时，应有 $f(t,\boldsymbol{v})\to f_0(\boldsymbol{v})$，但对具体的定解问题，这一点还有赖于严格的证明．

顺便说一下，玻尔兹曼 H 定理说明玻尔兹曼方程的不可逆性．实际上，可以证明：对理想气体而言，函数 H 与气体的熵仅相差一个负常数因子．关于玻尔兹曼方程不可逆性更深入的说明，参见 [3], [5].

3.2. 麦克斯韦－玻尔兹曼分布

由上段所述，平衡分布函数 $f_0(\boldsymbol{v})$ 是方程 (3.2) 的解．这个分布称为*麦克斯韦–玻尔兹曼分布*．

现在来确定这个分布的具体形式．

对 (3.2) 式取对数，有

$$\ln f_0(\boldsymbol{v})+\ln f_0(\boldsymbol{w})=\ln f_0(\boldsymbol{v}')+\ln f_0(\boldsymbol{w}'). \tag{3.17}$$

由于 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ 及 $\{\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$ 分别为任一可能的碰撞的初始及末端状态，上式具有一种守恒律的形式．于是，若 $\chi(\boldsymbol{v})$ 为一个与速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子有关的量，使 $\chi(\boldsymbol{v})+\chi(\boldsymbol{w})$ 在两个分子的碰撞下守恒：

$$\chi(\boldsymbol{v})+\chi(\boldsymbol{w})=\chi(\boldsymbol{v}')+\chi(\boldsymbol{w}'), \tag{3.18}$$

则方程 (3.17) 就有一个解

$$\ln f_0(\boldsymbol{v}) = \chi(\boldsymbol{v}). \tag{3.19}$$

由叠加原理， (3.17) 的一般解为

$$\ln f_0(\boldsymbol{v}) = \chi_1(\boldsymbol{v}) + \chi_2(\boldsymbol{v}) + \cdots, \tag{3.20}$$

其中 $\chi_1, \chi_2, \cdots$ 穷尽所有可能的独立守恒量.

对于一个设为无自旋 (无内部结构) 的分子，其质量 (为一常数)、动量 (或 $\boldsymbol{v}$) 及能量 (或 $|\boldsymbol{v}|^2$) 均是守恒量. 因此，$\ln f_0(\boldsymbol{v})$ 应为 $|\boldsymbol{v}|^2$、$\boldsymbol{v}$ 的三个分量及一个常数的线性组合，可写为

$$\ln f_0(\boldsymbol{v}) = -A|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0|^2 + \ln C \tag{3.21}$$

或

$$f_0(\boldsymbol{v}) = C\mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|^2}, \tag{3.22}$$

其中 C 、 A 及 $\boldsymbol{v}_0$ 的三个分量为五个常数，可以通过对系统的观测来决定.

将 (3.22) 代入 (2.3) 式，容易得到单位体积内的分子数

$$\begin{aligned} n &= C\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|^2}\mathrm{d}v \\ &= C\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}|^2}\mathrm{d}v \\ &= C\left(\frac{\pi}{A}\right)^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

由此可得 $A > 0$, 而

$$C = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} n. \tag{3.24}$$

将 (3.22) 代入 (2.5) 式，可得气体分子的平均速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \frac{C}{n}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v}\mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|^2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{C}{n}\int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0)\mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}|^2}\mathrm{d}v \\ &= \boldsymbol{v}_0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

这里，我们利用了 (3.23) 式及

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v} e^{-A|\boldsymbol{v}|^2} dv = 0.$$

这样，若设气体作为一个整体没有平移运动，必须取

$$\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0} \tag{3.26}$$

现在再计算分子的平均热能．为此，必须取 $\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$ 以排除宏观的动能．注意到 (2.6) 式右端的物理意义，易知分子的平均热能为

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2}|\boldsymbol{v}|^2 f(t,\boldsymbol{v}) dv}{n} \\
&= \frac{M}{2n}\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 f_0(\boldsymbol{v}) dv \\
&= \frac{MC}{2n}\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 e^{-A|\boldsymbol{v}|^2} dv \\
&= \frac{3}{4}\frac{M}{A}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

于是

$$A = \frac{3}{4}\frac{M}{\epsilon}. \tag{3.28}$$

再由 (3.24) 式，就得到

$$C = \left(\frac{3M}{4\pi\epsilon}\right)^{3/2} n. \tag{3.29}$$

为了将平均热能 ϵ 用一个可以直接测量的量来表示，我们来求相应于平衡分布函数的状态方程，即给出压强的相应表达式．根据定义，压强为气体作用在完全反射平面的单位面积上的平均力．设图 6 中的圆盘表示此单位面积，其法向为 x_1 轴．在分子的平均速度为零的假设下，一个分子仅当其速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x_1 方向的分量 $v_1 > 0$ 时才可能打上这个平面．而分子在此平面上的反射仅改变这一速度分量的符号，从而使此分子损失动量 $2Mv_1$．不难看出，单位时间中被此圆盘反射、速度在 $\boldsymbol{v}$ ($v_1 > 0$) 附近的微元 dv 中的分子数等于包含在以此圆盘为底、

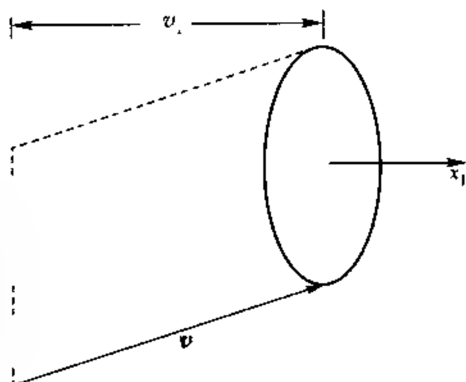


图 6

母线平行于 $\boldsymbol{v}$ 而高为 v_1 的圆柱体中的分子数 $f(t,\boldsymbol{v})v_1\mathrm{d}v$. 这样，损失的动量为

$$2Mv_1^2 f(t,\boldsymbol{v})\mathrm{d}v.$$

因此，对分子平均速度为零的气体，由于上述原因在单位时间内损失的总动量，即压强，为

$$\begin{aligned} p &= \int_{v_1>0} 2Mv_1^2 f(t,\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \\ &= \int_{v_1>0} 2Mv_1^2 f_0(\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \\ &= MC\int_{\mathbb{R}^3} v_1^2 \mathrm{e}^{-A\boldsymbol{v}^2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{MC}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 \mathrm{e}^{-A|\boldsymbol{v}|^2}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

再注意到 (3.27) 式，由上式即得

$$p = \frac{2}{3}n\epsilon. \tag{3.30}$$

这就是状态方程.

又由 (2.9) 式，在 $f = f_0(\boldsymbol{v}) = C\mathrm{e}^{-A\boldsymbol{v}^2}$ 时，有

$$p = nkT,$$

其中 k 为玻尔兹曼常量. 这样 (3.30) 式又可写为

$$\epsilon = \frac{3}{2}kT. \tag{3.31}$$

从而, 由 (3.28), (3.29) 式又有

$$A = \frac{M}{2kT}, \quad C = n\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \tag{3.32}$$

这样, 用温度 T 、平均速度 $\boldsymbol{v}_0$ 、分子密度 n 及分子质量 M 来表示, 在无外力作用时稀疏气体的平衡分布函数可写为

$$f_0(\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|^2/2kT}. \tag{3.33}$$

这就是麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布.

下面讨论存在外力场的情况. 在粒子所受外力为由

$$\boldsymbol{F} = -\nabla_x \phi(\boldsymbol{x}) \tag{3.34}$$

给出的保守力的情况下, 不难证明

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f_0(\boldsymbol{v})\mathrm{e}^{-\phi(\boldsymbol{x})/kT} \tag{3.35}$$

为玻尔兹曼方程 (2.54) 的一个与时间 t 无关的解, 即稳态解, 其中 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为由 (3.33) 式 (其中 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$) 给出的麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布. 事实上, 此时显然有 $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, 而由 (2.53) 式, 并利用 (3.2) 式, 碰撞项

$$\begin{aligned} J = {} & \mathrm{e}^{-2\phi(\boldsymbol{x})/kT}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}| \\ & \cdot(f_0(\boldsymbol{v}')f_0(\boldsymbol{w}') - f_0(\boldsymbol{v})f_0(\boldsymbol{w})) = 0. \end{aligned}$$

此外, 可以直接验证

$$\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x + \frac{\boldsymbol{F}}{M}\cdot\nabla_v\right)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.36}$$

对于平衡分布函数 (3.35), 可以将因子 $e^{-\phi(\boldsymbol{x})/kT}$ 吸收到分子密度 n 中, 而将其改写为

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = n(\boldsymbol{x})\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-M|\boldsymbol{v}|^2/2kT}, \tag{3.37}$$

其中

$$n(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\boldsymbol{v})\mathrm{d}v e^{-\phi(\boldsymbol{x})/kT} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{3.38}$$

在粒子所受外力为一常向量 $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{g}$ 时 (在重力场中即如此), 容易直接验证

$$f(t,\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{g}t|^2/2kT} \tag{3.39}$$

为玻尔兹曼方程 (2.54) 的解, 即满足

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{g}\cdot\nabla_v f = 0, \tag{3.40}$$

而碰撞项 J 仍为零. 由 (3.39) 式给出的分布函数虽然不是玻尔兹曼方程的稳态解, 但仍描述气体的平衡态, 只不过此时气体作为一个整体作宏观的匀加速运动.

§4. 守恒定律

为了研究气体的非平衡现象, 必须对给定的初始条件, 通过求解玻尔兹曼方程而得到相应的分布函数. 但即使不直接求解玻尔兹曼方程, 也可以从在任何分子碰撞中严格守恒的动力学量出发, 推导出玻尔兹曼方程任意解的某些精确的性质.

设 $\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 是一个与位置在 $\boldsymbol{x}$、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子有关的量, 使得对在点 $\boldsymbol{x}$ 发生的任何碰撞 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\}$, 均成立

$$\chi_1 + \chi_2 = \chi_1' + \chi_2', \tag{4.1}$$

其中 $\chi_1 = \chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, $\chi_2 = \chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$ 等等, 就称 χ 是一个守恒量.

对于守恒量，成立如下的

定理 4.1. 恒成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0, \tag{4.2}$$

其中 $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的右端项，即

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \\ & \cdot (f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}') - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})), \end{aligned} \tag{4.3}$$

但其中 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 并不要求是玻尔兹曼方程的解. 这里为简单起见，未标出 J 关于 t 的明显依赖性.

证明 由 (4.3) 式，有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ = & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ & \cdot (f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}') - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})). \end{aligned} \tag{4.4}$$

交换 (4.4) 式右端的积分变量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$, 注意到此时 $\sigma(\Omega)$ 保持不变，再将所得的结果与 (4.4) 式相加，就得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \\ & \cdot (f_1' f_2' - f_1 f_2)(\chi_1 + \chi_2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $f_1 = f_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $f_2 = f_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ 等.

将 (4.5) 式右端的 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'\}$ 交换，注意到 (2.25)、(2.29) 及 (2.34) 诸式，可将 (4.5) 式改写为

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \\ & \cdot (f_1 f_2 - f_1' f_2')(\chi_1' + \chi_2'). \end{aligned} \tag{4.6}$$

由于 χ 是守恒量, 即 (4.1) 式成立, 由 (4.5) 与 (4.6) 式立即得到 (4.2) 式. 定理证毕.

利用上述定理, 只要在玻尔兹曼方程 (2.54) 两端乘上相应的守恒量 χ, 并对 $\boldsymbol{v}$ 积分, 就可以由玻尔兹曼方程推出相应的守恒定律. 此时, 由定理 4.1, 与碰撞项 J 对应的积分为零, 于是有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}v\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{3} g_i\frac{\partial}{\partial v_i}\right) f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=0. \quad (4.7)$$

易知上式可写为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\chi f+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\chi v_i f-\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\frac{\partial\chi}{\partial x_i}v_i f\\&+\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\frac{\partial}{\partial v_i}(\chi g_i f)-\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\frac{\partial\chi}{\partial v_i}g_i f\\&-\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\chi\frac{\partial g_i}{\partial v_i}f=0.\end{aligned} \quad (4.8)$$

总假设当 $|\boldsymbol{v}|\to\infty$ 时, $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 趋于零, 从而由格林公式有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v\frac{\partial}{\partial v_i}(\chi g_i f)=0. \quad (4.9)$$

对于一个与 $\boldsymbol{v}$ 有关的量 A, 定义其平均值为

$$\langle A\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}vAf}{\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}vf}=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}vAf, \quad (4.10)$$

其中 $f=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的任一解, 而 $n=n(t,\boldsymbol{x})$ 为在 t 时刻、在 $\boldsymbol{x}$ 处单位体积中的气体分子数. 由此就有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}vAf=n\langle A\rangle=\langle nA\rangle. \quad (4.10)'$$

注意到 (4.9) 式, 由 (4.8) 及 (4.10)′ 式就可得到如下结论.

定理 4.2 (守恒定理) 对任何守恒量 χ, 恒成立

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nv_i\chi\rangle-n\sum_{i=1}^{3}\left\langle v_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right\rangle$$

$$-n\sum_{i=1}^{3}\left\langle g_i\frac{\partial\chi}{\partial v_i}\right\rangle - n\sum_{i=1}^{3}\left\langle\frac{\partial g_i}{\partial v_i}\chi\right\rangle = 0, \tag{4.11}$$

而其中在定义平均值时所用的 f 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的任一解.

像通常一样, 以下仅限于考察 $\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 无关的情形, 此时上式左端最后一项为零, 从而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nv_i\chi\rangle - n\sum_{i=1}^{3}\left\langle v_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right\rangle& \\ -n\sum_{i=1}^{3}\left\langle g_i\frac{\partial\chi}{\partial v_i}\right\rangle = 0&\end{aligned} \tag{4.12}$$

在单一分子的情形, 独立的守恒量有质量、动量及能量. 分别取

$$\chi = M, \quad \chi = Mv_i \quad (i=1,2,3) \quad 及 \quad \chi = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}|^2,$$

就可得到相应的守恒方程.

在 (4.12) 式中取 $\chi = M$, 就有

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle nM\rangle + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nMv_i\rangle = 0. \tag{4.13}$$

注意到

$$\langle nM\rangle = nM = \rho(t,\boldsymbol{x}) \tag{4.14}$$

为质量密度 (见 (2.4) 式), 而

$$\langle nMv_i\rangle = nM\frac{\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}v v_i f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})}{n} = \rho V_i, \tag{4.15}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 为平均速度 (见 (2.5) 式), (4.13) 式就化为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V}) = 0. \tag{4.16}$$

这就是熟知的质量守恒定律 —— 连续性方程 (见第二章 (1.10) 式).

在 (4.12) 式中取 $\chi = Mv_i$, 就有

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle nMv_i\rangle + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\langle nMv_iv_j\rangle - nMg_i = 0. \tag{4.17}$$

利用 (4.14)—(4.15) 式, 并注意到

$$\begin{aligned}\langle v_iv_j\rangle &= \langle (v_i - V_i)(v_j - V_j)\rangle + \langle v_i\rangle V_j + V_i\langle v_j\rangle - V_iV_j \\ &= \langle (v_i - V_i)(v_j - V_j)\rangle + V_iV_j\end{aligned}$$

及由 (2.7) 式可得压力张量

$$\begin{aligned}p_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} M(v_i - V_i)(v_j - V_j)f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \\ &= \rho\langle (v_i - V_i)(v_j - V_j)\rangle,\end{aligned} \tag{4.18}$$

就可将 (4.17) 式改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_iV_j) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \rho g_i \quad (i = 1,2,3),$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{V}) + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V} + \boldsymbol{P}) = \rho\boldsymbol{g}, \tag{4.19}$$

其中 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$. 这就是*动量守恒方程组* (见第二章 (2.23) 式, 但这儿的压力张量 $\boldsymbol{P}$ 与第二章中的应力张量相差一个负号).

利用连续性方程 (4.16) 化简 (4.19) 式, 就得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}V_k\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{g} \tag{4.20}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{g}, \tag{4.21}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}V_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$. 这就是*欧拉方程* (参见第二章 (2.26) 式).

最后，在 (4.12) 式中取 $\chi=\frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}|^2$，就有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle nM|\boldsymbol{v}|^2\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nMv_i|\boldsymbol{v}|^2\rangle-n\sum_{i=1}^{3}\langle Mg_iv_i\rangle=0 \tag{4.22}$$

由 (2.10)、(2.11) 式知

$$\frac{1}{2}\langle nM|\boldsymbol{v}|^2\rangle=\frac{3}{2}nkT+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2=\rho e+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2, \tag{4.23}$$

其中 e 为单位质量气体的内能. 又

$$n\sum_{i=1}^{3}\langle Mg_iv_i\rangle=\sum_{i=1}^{3}\rho g_i\langle v_i\rangle=\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{V}. \tag{4.24}$$

现在来看 (4.22) 式左端的第二项. 显然

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle nMv_i|\boldsymbol{v}|^2\rangle\\=&\frac{1}{2}\langle nM(v_i-V_i)|\boldsymbol{v}|^2\rangle+\frac{1}{2}\langle nMV_i|\boldsymbol{v}|^2\rangle\end{aligned} \tag{4.25}$$

由 (4.23) 式，有

$$\frac{1}{2}\langle nMV_i|\boldsymbol{v}|^2\rangle=\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2\right)V_i. \tag{4.26}$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle nM(v_i-V_i)|\boldsymbol{v}|^2\rangle\\=&\frac{1}{2}nM\langle(v_i-V_i)(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2+2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}+|\boldsymbol{V}|^2)\rangle\\=&\frac{1}{2}nM\langle(v_i-V_i)|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2\rangle\\&+nM\langle(v_i-V_i)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\rangle\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}nM\langle v_i-V_i\rangle|\boldsymbol{V}|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}nM\langle(v_i - V_i)|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}|^2\rangle \\
&\quad + nM\sum_{j=1}^{3}\langle(v_i - V_i)(v_j - V_j)\rangle V_j \\
&= q_i + \sum_{j=1}^{3} p_{ij}V_j
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

这里，我们利用了 (4.14) 及 (4.18) 式，而

$$
\begin{aligned}
q_i &= \frac{1}{2}nM\langle(v_i - V_i)|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}|^2\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2}(v_i - V_i)|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}|^2 f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}v.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

利用以上诸式，由 (4.22) 式即得能量守恒方程 (见第二章 (2.29) 式)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2\right) + \operatorname{div}\left(\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2\right)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{V}\right) \\
= &-\operatorname{div}\boldsymbol{Q} + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{V},
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

其中 $\boldsymbol{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ 相当于热量流密度向量 $-\kappa\,\mathrm{grad}\,T$.

利用连续性方程 (4.16), 上式可以化简为

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2\right) + \operatorname{div}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}) \\
= &-\operatorname{div}\boldsymbol{Q} + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{V},
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k\frac{\partial}{\partial x_k}$. 再由欧拉方程 (4.21), (4.30) 式又可进一步化为

$$
\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = -\operatorname{div}\boldsymbol{Q}. \tag{4.31}
$$

记

$$
S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.32}
$$

注意到 $\{p_{ij}\}$ 的对称性，(4.31) 式又可写为

$$
\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}S_{ij} = -\operatorname{div}\boldsymbol{Q}. \tag{4.33}
$$

这样，我们看到，由守恒定理 (定理 4.2) 可以从形式上得到流体力学方程组. 但要使其真正发挥作用，还必须求得玻尔兹曼方程 (2.54) 的解，从而据此确定 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$，使所得的方程组真正成为一个封闭的、有物理意义的流体动力学方程组.

严格地求解玻尔兹曼方程 (2.54) 是很困难的. 下面将介绍一些有关的近似求解方法，并相应地给出流体动力学方程组的各阶近似.

§5. 零阶近似

假设所考虑的气体尽管并不处于平衡状态，但却与之相距不远. 特别，假定在气体中任一点的邻域中，分布函数均可局部地用麦克斯韦—玻尔兹曼分布来表示，且密度、温度及平均速度在时、空中仅缓慢地变化. 对于这样的气体，可自然地作下述近似：

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \approx f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),$$

其中 $f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 由麦克斯韦—玻尔兹曼分布 (3.33) 给出，即取

$$f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{M|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2}{2kT}\right), \tag{5.1}$$

但其中 n、T 及 $\boldsymbol{V}$ 是 t 和 $\boldsymbol{x}$ 的缓慢变化的函数.

显然，$f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 不可能是玻尔兹曼方程 (2.54) 的一个精确解. 事实上，由于 n、T 及 $\boldsymbol{V}$ 均与 $\boldsymbol{v}$ 无关，并注意到 (2.22)—(2.23) 式，显然有

$$\begin{aligned} J = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(&f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}') \\ &-f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})) = 0, \end{aligned}$$

但一般来说

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v\right)f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \neq 0. \tag{5.2}$$

尽管如此，我们仍假设 $f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 是分布函数的一个好的近似，并讨论其在物理上的相应结论.

由于假设 $f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 是一个好的近似，将 (5.1) 式中的 $nM=\rho$、T 及 $\boldsymbol{V}$ 视为相应的密度、温度及平均速度，就应该近似地满足相应的守恒定律. 再由这些守恒定律就可以给出对 (5.1) 式中 ρ、T 及 $\boldsymbol{V}$ 应有的限制.

为了具体地得到这些守恒定律，必须计算此时相应的压力张量 (p_{ij}) 及热量流密度向量 (q_i)，并将它们相应地记为 $(p_{ij}^{(0)})$ 及 $(q_i^{(0)})$. 记

$$C(t,\boldsymbol{x})=n\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2},\quad A(t,\boldsymbol{x})=\frac{M}{2kT},\tag{5.3}$$

(5.1) 式可写为

$$f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=C(t,\boldsymbol{x})\exp(-A(t,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2).\tag{5.4}$$

相应于这个分布函数，由 (4.28) 及 (2.7) 式知，其热量流密度向量与压力张量分别为

$$\begin{aligned}q_i^{(0)} &= \frac{M}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(v_i-V_i)|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2C(t,\boldsymbol{x})\\&\quad\cdot\exp(-A(t,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2)\mathrm{d}v=0\end{aligned}\tag{5.5}$$

及

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(0)} &= M\int_{\mathbb{R}^3}(v_i-V_i)(v_j-V_j)C(t,\boldsymbol{x})\\&\quad\cdot\exp(-A(t,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}|^2)\mathrm{d}v\\&= MC(t,\boldsymbol{x})\int_{\mathbb{R}^3}v_iv_j\exp(-A(t,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}|^2)\mathrm{d}v\\&= p\delta_{ij},\end{aligned}\tag{5.6}$$

其中

$$\begin{aligned}p &= p(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}MC(t,\boldsymbol{x})\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{v}^2\exp(-A(t,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}|^2)\mathrm{d}v\\&= \frac{1}{3}MC(t,\boldsymbol{x})\cdot\frac{3}{2}\frac{\pi^{3/2}}{A^{5/2}}\\&= nkT\end{aligned}\tag{5.7}$$

为局部静压强 (见 (2.9) 式).

将这样确定的 $q_i^{(0)}$ 及 $p_{ij}^{(0)}$ 代入动量守恒与能量守恒方程 (4.19) 与 (4.29), 再加上质量守恒方程 (4.16), 就得到此时相应的守恒方程组

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V})=0, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{V})+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}+p\boldsymbol{I})=\rho\boldsymbol{g}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2\right)+\operatorname{div}\left(\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}|^2+p\right)\boldsymbol{V}\right)=\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{V}, \tag{5.10}$$

其中状态方程为

$$p=nkT=R\rho T\quad(\text{其中 } R=\frac{k}{M}), \tag{5.11}$$

且由 (2.11) 式有

$$e=\frac{3}{2}\frac{kT}{M}=C_VT\quad(\text{其中 } C_V=\frac{3}{2}R). \tag{5.12}$$

这说明所讨论的非但是理想气体, 而且还是多方气体 (见第二章 (1.6) (1.7) 式).

这样, 作为零阶近似, 我们得到不计粘性及热传导的理想流体力学方程组 (见第二章 (1.10) 、 (1.13) 及 (1.19) 式), 而所讨论的气体则为多方气体.

如第二章 §1 中那样, 利用连续性方程 (5.8), 动量守恒方程 (5.9) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\boldsymbol{g}, \tag{5.13}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}V_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5.14}$$

再利用连续性方程及上式, 能量守恒方程 (5.10) 可化为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0 \tag{5.15}$$

再利用 (5.11) 及 (5.12) 式, 上方程就化为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{3}T\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0. \tag{5.16}$$

§6. 一阶近似

6.1. 查普曼—恩斯科格 (Chapman Enskog) 展开

为了得到关于玻尔兹曼方程 (2.54) 的更高阶近似，现在介绍一个由查普曼和恩斯科格提出来的、现称为查普曼—恩斯科格展开的方法.

记 λ 为分子的平均自由程，即分子相继两次碰撞期间所走的平均距离. 在标准的温度与压强 (见本章 §1) 下

$$\lambda \approx 10^{-5}\mathrm{cm}.$$

记 L 为气体的宏观特征长度. 通常，$\varepsilon=\lambda/L$ 是一个很小的量.

粗略地说，查普曼—恩斯科格展开就是将分布函数 f 按 ε 的幂次展开为

$$f=f^{(0)}+f^{(1)}+\cdots, \tag{6.1}$$

其中 $f^{(0)}$ 为上节给出的零阶近似，而 $f^{(1)}/f^{(0)}$ 的量级为 ε, 等等. 因此可依次求得玻尔兹曼方程的各阶近似.

对于形如 (6.1) 的分布函数 f, 可将玻尔兹曼方程 (2.54) 写为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v\right)(f^{(0)}+f^{(1)}+\cdots)\\&=J^{(0)}+J^{(1)}+\cdots,\end{aligned} \tag{6.2}$$

其中

$$J^{(0)}=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f_1^{(0)\prime}f_2^{(0)\prime}-f_1^{(0)}f_2^{(0)}), \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}J^{(1)}=&\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int\mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|(f_2^{(0)\prime}f_1^{(1)\prime}-f_2^{(0)}f_1^{(1)}\\&+f_1^{(0)\prime}f_2^{(1)\prime}-f_1^{(0)}f_2^{(1)}),\end{aligned} \tag{6.4}$$

等等，而 $f_1^{(0)\prime}=f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}')$, $f_1^{(1)}=f^{(1)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, $f_2^{(1)\prime}=f^{(1)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')$ 等.

下面来分别分析 (6.2) 式中各项的量级.

假设分布函数的量只在点 $\boldsymbol{x}$ 的位置变化一个距离 L 时才有可观的变化，那么 (6.2) 式左端的玻尔兹曼算子 $\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v$ 作

用在一个分布函数上，在量级上就相当于在该函数上乘以因子 $\overline{V}/L$，其中 V 为平均速度. 事实上，对于 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x$ 这一项，这一事实是显然的，而另外两项亦假设与它有同样的量级.

现考察由 (6.4) 式右端给出的 $J^{(1)}$. 易见

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}u\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f_2^{(0)}f_1^{(1)}\\
&\approx -f^{(1)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})/\tau \approx \varepsilon f^{(0)}/\tau,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

其中

$$
\tau=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\right)^{-1}. \tag{6.6}
$$

由 (2.38) 式，$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}w\int \mathrm{d}\Omega\sigma(\Omega)|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|f^{(0)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$ 表示以一个位于 $\boldsymbol{x}$、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子为靶子，一切可能的 $\boldsymbol{w}$ 为入射流，在单位时间内的碰撞次数. 因此，作为其倒数的 τ，就相当于碰撞时间 (相继两次碰撞之间的平均时间). 对于 (6.4) 右端的其它各项，也有类似的结果. 而对于 (6.3) 的右端各项，则少一个 ε 的因子.

这样，在 (6.2) 式两端乘以 τ，注意到 $\lambda\approx\overline{V}\tau$，并令其两端关于 ε 的零阶项相等，即得

$$
J^{(0)}=0. \tag{6.7}
$$

这正是上节中 $f^{(0)}$ 所满足的方程.

再比较乘以 τ 后的 (6.2) 式两端关于 ε 的 1 次项，就得到

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v\right)f^{(0)}=J^{(1)}. \tag{6.8}
$$

由于 $f^{(0)}$ 已由 (5.1) 式给出，(6.8) 式就是 $f^{(1)}$ 应满足的积分方程.

为了简化上述积分方程，代替未知函数 $f^{(1)}$，由下式引进一个新的函数 ϕ:

$$
f^{(1)}=f^{(0)}\phi. \tag{6.9}
$$

将 (6.9) 式代入 $J^{(1)}$ 的表达式 (6.4)，并注意到由 $f^{(0)}$ 的定义 (5.1) 及 (2.22)—(2.23) 式可得

$$f_1^{(0)\prime} f_2^{(0)\prime} = f_1^{(0)} f_2^{(0)}, \tag{6.10}$$

就有

$$\begin{aligned} J^{(1)} = & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| f_1^{(0)} f_2^{(0)} \\ & \cdot (\phi_1' + \phi_2' - \phi_1 - \phi_2), \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中 $\phi_1 = \phi_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $\phi_2' = \phi(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}')$ 等.

将方程 (6.8) 的两端除以 $f_1^{(0)} = f^{(0)}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, 并利用 (6.11) 式, 就得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x + \boldsymbol{g} \cdot \nabla_v\right) \ln f^{(0)} = n\tilde{J}(\phi), \tag{6.12}$$

其中

$$\tilde{J}(\phi) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}w \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| f_2^{(0)} (\phi_1 + \phi_2 - \phi_1' - \phi_2') \tag{6.13}$$

注意到 $f^{(0)}$ 的表达式 (5.1), 积分算子 $\tilde{J}$ 实际上不依赖于 n, 因而也不依赖于 ρ.

先考察 (6.12) 式的左端. 因为 $f^{(0)}$ 对 t 及 $\boldsymbol{x}$ 的依赖性是通过 ρ、T 及 $\boldsymbol{V}$ 来实现的, 为了计算 (6.12) 式的左端, 必须先计算 $f^{(0)}$ 关于 ρ、T 及 $\boldsymbol{V}$ 等变量的偏导数. 由 (5.1) 式, 有

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} = \frac{f^{(0)}}{\rho}, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{M|\boldsymbol{U}|^2}{2kT} - \frac{\rho}{2}\right) f^{(0)}, \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} = \frac{M}{kT} U_i f^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i} = -\frac{M}{kT} U_i f^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.17}$$

其中 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} = (U_1, U_2, U_3)$. 这样, 我们就得到

$$
\begin{aligned}
&(6.12)\ \text{式的左端}\\
=&\ \frac{1}{f^{(0)}}\left\{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x\rho\right)+\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x T\right)\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x V_i\right)+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v f^{(0)}\right\}\\
=&\ \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\frac{1}{T}\left(\frac{M|\boldsymbol{U}|^2}{2kT}-\frac{3}{2}\right)\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}\\
&+\frac{M}{kT}\sum_{i=1}^{3}U_i\frac{\mathrm{D}V_i}{\mathrm{D}t}-\frac{M}{kT}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U},
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

其中

$$
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}
\tag{6.19}
$$

利用零阶近似满足的理想流体力学方程组 (5.8)、(5.16) 及 (5.13)，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}&=-\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x\rho,\\
\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}&=-\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x T,\\
\frac{\mathrm{D}V_i}{\mathrm{D}t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+g_i+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x V_i\quad(i=1,2,3)
\end{aligned}
$$

将以上诸式代入 (6.18) 式，并利用状态方程 (5.11)，即得

$$
\begin{aligned}
(6.12)\ \text{式的左端}=&-\mathrm{div}\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x\rho\\
&+\frac{1}{T}\left(\frac{M|\boldsymbol{U}|^2}{2kT}-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}T\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x T\right)\\
&+\frac{M}{kT}\sum_{i=1}^{3}U_i\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+g_i+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x V_i\right)-\frac{M}{kT}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U}\\
=&\ \frac{1}{T}\left(\frac{M}{2kT}|\boldsymbol{U}|^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x T\\
&+\frac{M}{kT}\sum_{i,j=1}^{3}\left(U_iU_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}|\boldsymbol{U}|^2\right)S_{ij},
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

其中 S_{ij} 由 (4.32) 式给出

这样，ϕ 满足的积分方程 (6.12) 就可写为如下的形式：

$$\tilde{J}(\phi) = -\frac{1}{nkT^2}\left(\frac{1}{2}M|\boldsymbol{U}|^2-\frac{5}{2}kT\right)\boldsymbol{U}\cdot\nabla_x T -\frac{M}{nkT}\sum_{i,j=1}^{3}\left(U_iU_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}|\boldsymbol{U}|^2\right)S_{ij}. \tag{6.21}$$

由此可见，$\tilde{J}(\phi)$ 对 $\boldsymbol{v}$ 的依赖性是通过对 $\boldsymbol{U}$ 的依赖性来实现的，而且 $\tilde{J}(\phi)$ 是 $\nabla_x T$ 及 $\boldsymbol{S}=(S_{ij})$ 的（系数依赖于 $\boldsymbol{U}$ 及 T 的）线性组合再除以 n. 再注意到由 (6.13) 式，$\tilde{J}(\phi)$ 线性地依赖于 ϕ, 我们有理由假定 ϕ 具有以下形式：

$$\phi = \frac{1}{nkT^2}\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{1}{nkT}\sum_{i,j=1}^{3}b_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \tag{6.22}$$

其中 a_i, b_{ij} 均为 $\boldsymbol{U}$ 及 T 的待定函数. 将其代入 (6.21) 式，并比较其两端 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 和 $\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 的系数，即得

$$\tilde{J}(a_i)=\tilde{a}_i,\quad \tilde{J}(b_{ij})=\tilde{b}_{ij}\quad (i,j=1,2,3), \tag{6.23}$$

其中

$$\tilde{a}_i=-\left(\frac{1}{2}M|\boldsymbol{U}|^2-\frac{5}{2}kT\right)U_i,\quad \tilde{b}_{ij}=-M\left(U_iU_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}|\boldsymbol{U}|^2\right) \tag{6.24}$$

(6.23) 及 (6.24) 分别为决定 a_i 及 b_{ij} 的积分方程. 一旦由它们解得 a_i 及 b_{ij}, 就可由 (6.22) 得到 ϕ, 从而由 (6.9) 式得到玻尔兹曼方程 (2.54) 的解的一阶近似 $f^{(1)}$.

6.2. 积分方程的可解性

设 $f=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为所求的分布函数，则由 (2.3)、(2.5) 及 (2.6) 式，易见有

$$n = \int_{\mathbb{R}^3} f\mathrm{d}v,$$

$$n\boldsymbol{V} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v}f\mathrm{d}v$$

及

$$\frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}nM|\boldsymbol{V}|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}|^2 f \mathrm{d}v$$

由本章 §5 中给出的 $f^{(0)}$ 的定义，在以上诸式中将 f 换为 $f^{(0)}$，它们依然成立．因此

$$\int_{\mathbb{R}^3} (f - f^{(0)})\chi \mathrm{d}v = 0 \tag{6.25}$$

对一切守恒量 χ（见 §4）成立．假设 $f = f^{(0)} + f^{(0)}\phi$，就有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}\phi\chi \mathrm{d}v = 0 \tag{6.26}$$

对一切守恒量 χ 成立．

记 H 为由 $\boldsymbol{v}$ 的函数所组成的希尔伯特（D. Hilbert）空间，其中元素 $\phi, \psi \in H$ 的内积定义为

$$(\phi, \psi)_H = \int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}\phi\psi \mathrm{d}v. \tag{6.27}$$

这样，(6.26) 式就可改写为

$$(\phi, \chi)_H = 0 \tag{6.28}$$

对一切守恒量 χ 成立，即 ϕ 与 5 个守恒量（即质量、动量及能量）张成的空间正交．注意到 ϕ 的表达式 (6.22)，由上式就有

$$(a_i, \chi)_H = 0, \quad (b_{ij}, \chi)_H = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.29}$$

对一切守恒量 χ 成立．

将 $\tilde{J}$ 视为上述希尔伯特空间 H 中的积分算子．由 J 的定义 (6.13) 不难验证

$$(\tilde{J}(\phi), \psi)_H = (\phi, \tilde{J}(\psi))_H \quad \forall \phi, \psi \in \tilde{J}\text{的定义域}, \tag{6.30}$$

而且 $\tilde{J}$ 是非负的，即成立

$$(\tilde{J}(\phi), \phi)_H \geqslant 0, \quad \forall \phi \in \tilde{J}\text{的定义域}. \tag{6.31}$$

以上两式的证明作为习题留给读者．

此外，由 $\tilde{J}$ 的定义及守恒量的定义 (4.1)，不难看出：算子 $\tilde{J}$ 的核为由上述 5 个守恒量所张成的空间，即

$$J(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi \text{ 为守恒量}. \tag{6.32}$$

另外，利用 $\tilde{a}_i$ 及 $\tilde{b}_{ij}$ 的表达式 (6.24) 可以直接验证

$$(\tilde{a}_i,\chi)_H=0,\quad (\tilde{b}_{ij},\chi)_H=0\quad (i,j=1,2,3) \tag{6.33}$$

对一切守恒量 χ 成立 (见习题 4)．可以证明算子 $\tilde{J}$ 是自共轭的，而上式正是自共轭积分方程 (6.23) 的可解性条件 (见 [4])．

由 $\tilde{a}_i$ 的定义 (6.24) 式可以看出，$(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3)^{\mathrm{T}}$ 为 U 空间中的一阶张量 (向量) (见附录一)．利用微分散射截面关于正交变换的不变性不难验证：积分方程 $\tilde{J}(a_i)=\tilde{a}_i\ (i=1,2,3)$ 的解 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 也应是 U 空间中的一阶张量，而且对任一正交变换，它的转换方式与 $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 完全一样．所以应有

$$a_i=\alpha(T,|\boldsymbol{U}|)\tilde{a}_i\quad (i=1,2,3). \tag{6.34}$$

类似地，有

$$b_{ij}=\beta(T,|\boldsymbol{U}|)\tilde{b}_{ij}\quad (i,j=1,2,3). \tag{6.35}$$

注意到 $\tilde{J}$ 的非负性 (6.31)，α 及 β 均为正函数．又由于 $\tilde{J}$ 不依赖于 ρ，α 及 β 只是 $(T,|\boldsymbol{U}|)$ 的函数，亦与 ρ 无关．

6.3．粘性系数和导热系数

到目前为止，我们虽然证明了玻尔兹曼方程一阶近似的可解性，还没有具体给出一阶近似的解，但至少在形式上已经可以给出压力张量及热量流密度向量，从而可由此给出粘性系数及导热系数．

首先讨论热量流密度向量．注意到 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}$ 及 (5.5) 式，由 (4.28) 式有

$$\begin{aligned}
q_i &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2(f^{(0)}+f^{(0)}\phi)\mathrm{d}U\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2 f^{(0)}\phi\mathrm{d}v\\
&= \left(\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2,\phi\right)_H
\end{aligned} \tag{6.36}$$

由 (6.35) 及 (6.24) 式易见, b_{ij} 为 $\boldsymbol{U}$ 的偶函数, 从而有

$$\left(\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2, b_{ij}\right)_H = 0 \quad (i,j=1,2,3). \tag{6.37}$$

类似地, 有

$$\left(\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2, a_j\right)_H = 0 \quad (i \neq j) \tag{6.38}$$

及

$$\left(\frac{M}{2}U_i|\boldsymbol{U}|^2, a_i\right)_H = (\tilde{a}_i, a_i)_H - \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}(\tilde{a}_j, a_j)_H. \tag{6.39}$$

在得到 (6.39) 式的过程中, 我们利用了 U_i 为守恒量, 而 a_i 与任一守恒量在空间 H 中正交 (见 (6.29) 式) 的事实. 利用 φ 的表达式 (6.22), 并注意到以上各式, 由 (6.36) 式就得到

$$q_i = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3), \tag{6.40}$$

其中导热系数

$$\kappa = \frac{1}{3nkT^2}\sum_{j=1}^{3}(\tilde{a}_j, a_j)_H. \tag{6.41}$$

将由 (6.24) 及 (6.34) 式给出的 $\tilde{a}_j$ 及 a_j 代入上式, 并注意到内积 $(\cdot,\cdot)_H$ 的定义 (6.27) 及 $f^{(0)}$ 的表达式 (5.1), 我们有

$$\begin{aligned}\kappa = \; & \frac{1}{3}\left(\frac{M}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{5}{2}}T^{-\frac{7}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(T,|\boldsymbol{U}|) \\ & \cdot\left(\frac{1}{2}M|\boldsymbol{U}|^2 - \frac{5}{2}kT\right)^2|\boldsymbol{U}|^2 e^{-\frac{M|\boldsymbol{U}|^2}{2kT}}d\boldsymbol{U}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

引进球面坐标, 可将上式右端的三重积分化为单重积分, 再作简单的变量代换, 就可得到导热系数

$$\kappa = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}M}k^2T\int_0^\infty \alpha\left(T, \sqrt{\frac{kT}{M}}r\right)(r^2-5)^2r^4e^{-\frac{1}{2}r^2}dr. \tag{6.43}$$

尽管并未给出函数 $\alpha(T,|\boldsymbol{U}|)$ 的确切形式, 但由上式已经可以看出: 导热系数 κ 只依赖于绝对温度 T.

其次讨论压力张量. 利用 (5.6)—(5.7) 式, 可将压力张量 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ (见 (2.7) 式) 表示为

$$p_{ij}=p\delta_{ij}+p'_{ij}, \tag{6.44}$$

其中

$$p=nkT, \tag{6.45}$$

而

$$\begin{aligned} p'_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} MU_iU_jf^{(0)}\varphi \mathrm{d}U \\ &= (MU_iU_j, \varphi)_H \end{aligned} \tag{6.46}$$

类似于 (6.37) 式, 不难验证

$$(MU_iU_j, a_i)_H=0 \quad (i,j=1,2,3). \tag{6.47}$$

这样, 将 φ 的表达式 (6.22) 代入 (6.46) 式, 就得到

$$p'_{ij}=-\frac{M}{nkT}\sum_{l,m=1}^{3}(U_iU_j, b_{lm})_H\frac{\partial V_l}{\partial x_m}. \tag{6.48}$$

注意到 $|\boldsymbol{U}|^2$ 为守恒量, 而 b_{lm} 与任一守恒量在 H 空间中正交 (见 (6.28) 式), 由 $\tilde{b}_{ij}$ 的定义 (6.23) 式、并注意到 (b_{lm}) 的对称性, 上式又可改写为

$$\begin{aligned} p'_{ij} &= -\frac{1}{nkT}\sum_{l,m=1}^{3}(\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H\frac{\partial V_l}{\partial x_m} \\ &= -\frac{1}{nkT}\sum_{l,m=1}^{3}(\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H S_{lm} \end{aligned} \tag{6.49}$$

利用 (6.24) 和 (6.35) 式, 并注意到 b_{ij} 与守恒量 $|\boldsymbol{U}|^2$ 正交, 不难验证

$$(\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H=0, \ 若\ i\neq j, (l,m) 或 (m,l)\neq(i,j), \tag{6.50}$$

$$(\tilde{b}_{ii}, b_{lm})_H=0, \ 若\ l\neq m, \tag{6.51}$$

而 $(\tilde{b}_{ij}, b_{ij})_H$ 在 $i\neq j$ 时, 其值与 i, j 无关. 因此, 由 (6.49) 式易见

$$p'_{ij}=-2\mu S_{ij}, \quad 若\ i\neq j, \tag{6.52}$$

其中

$$\mu = \frac{1}{nkT}(b_{ij}, b_{ij})_H = \frac{M^2}{nkT}(U_iU_j, \beta U_iU_j)_H, \quad i \neq j. \tag{6.53}$$

这里，我们又一次利用了 b_{ij} 与守恒量 $\boldsymbol{U}^2$ 的正交性以及当 $i \neq j$ 时，$(U_iU_j, \beta|\boldsymbol{U}|^2)_H = 0$.

注意到 (6.51) 式，由 (6.49) 式类似地有

$$\begin{aligned} p'_{ii} &= -\frac{1}{nkT}\sum_{l=1}^{3}(b_{ii}, b_{ll})_H S_{ll} \\ &= -\frac{1}{nkT}\sum_{l=1}^{3}(MU_i^2, b_{ll})_H S_{ll}. \end{aligned} \tag{6.54}$$

此外，由 b_{ll} 的表达式 (6.35) 及 (6.24) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3}(MU_i^2, b_{ll})_H S_{ll} &= (MU_i^2, M\beta U_i^2)_H S_{ii} \\ &+ \sum_{l\neq i}(MU_i^2, M\beta U_l^2)_H S_{ll} - \frac{1}{3}(MU_i^2, M\beta\, \boldsymbol{U}^2)_H \mathrm{div}\boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{6.55}$$

由 (6.53) 式容易看出

$$(MU_i^2, M\beta U_l^2)_H = nkT\mu, \quad 若\ i \neq l \tag{6.56}$$

及

$$(MU_i^2, M\beta|\boldsymbol{U}|^2)_H = nkT\delta + 2nkT\mu, \tag{6.57}$$

其中

$$\delta = \frac{M^2}{nkT}(U_i^2, \beta U_i^2)_H, \tag{6.58}$$

且上式右端显然与 i 无关. 这样，由 (6.54) 式容易得到

$$\begin{aligned} p'_{ii} &= -\delta S_{ii} - \mu\sum_{l\neq i} S_{ll} + \frac{1}{3}(\delta + 2\mu)\mathrm{div}\boldsymbol{V} \\ &= -(\delta - \mu)S_{ii} + \frac{1}{3}(\delta - \mu)\mathrm{div}\boldsymbol{V}. \end{aligned} \tag{6.59}$$

下面进一步给出 δ 及 μ 的表达式. 在 (6.58) 式中取 $i=3$ 并注意内积 $(\cdot,\cdot)_H$ 的定义 (6.27) 及 $f^{(0)}$ 的定义 (5.1), 有

$$\delta = \frac{M}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{M}{kT}\right)^{\frac{5}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\beta(T,|\boldsymbol{U}|)U_3^4\mathrm{e}^{-\frac{M\boldsymbol{U}^2}{2kT}}\mathrm{d}U. \tag{6.60}$$

利用球面坐标 $U_1=r\cos\phi\sin\theta$, $U_2=r\sin\phi\sin\theta$, $U_3=r\cos\theta$ 计算上述积分, 就得到

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{M}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{M}{kT}\right)^{\frac{5}{2}}\int_0^{\infty}\beta(T,r)r^6\mathrm{e}^{-\frac{Mr^2}{2kT}}\mathrm{d}r \\ &\quad\cdot\int_0^{\pi}\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2}{5\sqrt{2\pi}}kT\int_0^{\infty}\beta\left(T,\sqrt{\frac{kT}{M}}r\right)r^6\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{6.61}$$

再由 μ 与 δ 的表达式 (6.53) (其中分别取 $i=1$ 及 2) 及 (6.58) (其中取 $i=1$, $j=2$), 易知有

$$\begin{aligned}&2(\delta-\mu) \\ &= \frac{M^2}{nkT}\int_{\mathbb{R}^3}\beta(T,|\boldsymbol{U}|)(U_1^4+U_2^4-2U_1^2U_2^2)f^{(0)}\mathrm{d}U \\ &= \frac{M^2}{nkT}\int_{\mathbb{R}^3}\beta(T,|\boldsymbol{U}|)(U_1-U_2)^2(U_1+U_2)^2f^{(0)}\mathrm{d}U.\end{aligned} \tag{6.62}$$

在上述积分中作正交变换

$$U_1^*=\frac{\sqrt{2}}{2}(U_1-U_2),\quad U_2^*=\frac{\sqrt{2}}{2}(U_1+U_2),\quad U_3^*=U_3,$$

并注意到 μ 的表达式 (6.53), 就得到

$$\begin{aligned}2(\delta-\mu) &= \frac{4M^2}{nkT}\int_{\mathbb{R}^3}\beta(T,|\boldsymbol{U}^*|)U_1^{*2}U_2^{*2}f^{(0)}\mathrm{d}U^* \\ &= 4\mu.\end{aligned} \tag{6.63}$$

由此立即得到

$$\mu=\frac{1}{3}\delta. \tag{6.64}$$

再利用 (6.61) 式，就得到

$$\mu = \frac{2}{15\sqrt{2\pi}}kT\int_0^{\infty}\beta\left(T,\sqrt{\frac{kT}{M}}r\right)r^6\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r. \tag{6.65}$$

尽管并未给出函数 $\beta(T,|\boldsymbol{U}|)$ 的确切形式，但由上式已经可以看出：粘性系数 μ 只依赖于绝对温度 T.

利用 (6.63) 式，由 (6.59) 式即得

$$p'_{ii} = -2\mu\left(S_{ii} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{V}\right) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6.66}$$

联合上式与 (6.52) 式，就得到

$$p'_{ij} = -2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{V}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.67}$$

从而由 (6.44) 式，就得到本构方程

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{V}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{6.68}$$

这与第二章 (2.20) 式对粘性热传导流所给出的本构方程在膨胀粘性系数 $\mu' = 0$ 时的形式是完全一致的. 要注意的是，在那里 (p_{ij}) 表示应力张量，而在这里同样的记号 (p_{ij}) 则表示压力张量，它们之间相差一个符号. 此外，这儿得到相应于膨胀粘性系数为零时的结论，与我们假定所讨论的气体分子没有内部结构是相关的.

在上述讨论中并未给出函数 $\alpha(T,|\boldsymbol{U}|)$ 和 $\beta(T,|\boldsymbol{U}|)$ 的确切形式，因此，(6.43) 和 (6.65) 式并未具体给出计算导热系数和粘性系数的公式. 深入的讨论可以进一步给出有关的近似计算公式，而且其计算结果可以达到与实验值相当接近的程度. 有兴趣的读者可参阅本章后所列的参考文献 (例如 [1], [4])

§7. 伏拉索夫 (Vlasov) 方程及耦合方程组

7.1. 伏拉索夫方程

对由玻尔兹曼方程所描述的气体分子群体而言，其粒子 (分子) 之间，除了碰撞 (近程作用力) 之外没有其它的作用力，任何一个粒子在不发生碰撞时的运动状态完全是独立的. 如果对所研究的粒子群体，其中的粒子之间存在着长程的作用力，而它们之间的相互碰撞却很少发生，可以忽略，这时玻尔兹曼方程就不再适用. 例如在等离子体 (见第三章) 中，由于带电粒子间作用的库仑力是一种长程力，任一带电粒子在任何时刻都与其它粒子发生相互作用，而不可能存在独立的运动状态. 此外，对宇宙星系而言，其星体之间由于 (长程的) 引力而相互作用，也有类似的情况. 这些都是与玻尔兹曼方程成立的条件相违背的. 但在许多情况下，可以近似地认为粒子之间相互作用的结果，相当于引入一个平均外加力场：每个粒子在该场的作用下运动，而这个平均场又由全部粒子的运动状态所决定. 这样，用一个平均的外加力场来代替粒子间的长程相互作用，就使我们可以继续利用玻尔兹曼方程的基本框架来处理有关的问题.

现讨论一个粒子群体，其粒子之间的相互作用力是长程的，且设无碰撞发生. 设由全体粒子运动状态所决定的平均力场对每个粒子 (单位质量上) 的作用力为 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$. 由 §2 中的推导可知，粒子的分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 应满足以下方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f+\boldsymbol{g}\cdot\nabla_v f=0. \tag{7.1}$$

这个方程称伏拉索夫方程. 它作为玻尔兹曼方程的一种特殊形式，是等离子体研究中的基本方程之一.

7.2. 伏拉索夫–泊松 (Vlasov–Poisson) 方程组

现在考察带电粒子群体 (如等离子体中的电子群体等) 的运动情况. 假定过程进行得不太快，使电磁效应可以忽略，即可作静电近似. 设粒子的质量为 M，所带电荷为 q，并设这些带电粒子形成的 (平均) 电

场为 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$. 这样, 由于磁场已被忽略, 一个粒子单位质量上受到的电场力为 $\boldsymbol{g} = \frac{q}{M}\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$. 因此, 这些带电粒子的分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 应满足伏拉索夫方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f + \frac{q}{M}\boldsymbol{E}\cdot\nabla_v f = 0 \tag{7.2}$$

由麦克斯韦方程组, 此时尽管 $\boldsymbol{E}$ 并非静电场, 但高斯定理仍然成立 (见第一章 (3.9) 式), 即有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{7.3}$$

其中 ε_0 为真空中的介电常数, ρ 为电荷密度. 再由分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 的定义, 电荷密度即单位体积中的电荷为

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = q\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{7.4}$$

在静电近似下, 可以 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ 表示电场 $\boldsymbol{E}$ 的势:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla_x\phi, \tag{7.5}$$

于是, 注意到 (7.4) 式, 方程 (7.2)—(7.3) 可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f - \frac{q}{M}\nabla_x\phi\cdot\nabla_v f = 0 \tag{7.6}$$

及

$$\Delta\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{7.7}$$

这个方程组称为伏拉索夫–泊松方程组.

下面我们具体考察将伏拉索夫–泊松方程组 (7.6)—(7.7) 应用于无外加磁场的高温等离子体的情形. 如果过程的频率不是太低, 可以认为正离子是不动的, 且构成一个在空间均匀分布的正电荷背景. 设 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 表示等离子体中电子的分布函数, 而对电子而言, $q = -e$. 考虑到上述均匀分布的正电荷背景, 决定电场的电荷并不仅仅由电子提供, 还应包括由正离子给出的正电荷. 正电荷的密度可写为

$$e\int_{\mathbb{R}^3} f_0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v, \tag{7.8}$$

其中 $f_0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为由 (3.33) 式给出的麦克斯韦–玻尔兹曼分布 (在其中 $\boldsymbol{v}_0 = 0$). 这样, 总的电荷密度应为

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = -e\int_{\mathbb{R}^3}(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - f_0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\mathrm{d}v. \tag{7.9}$$

于是, 伏拉索夫–泊松方程组 (7.6)–(7.7) 此时应修正为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f + \frac{e}{M}\nabla_x\phi\cdot\nabla_v f = 0 \tag{7.10}$$

及

$$\Delta\phi = \frac{e}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - f_0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\mathrm{d}v \tag{7.11}$$

如果对所讨论的粒子群体, 其粒子之间只存在 (长程的) 引力作用, 那么, 其粒子分布函数 f 与引力场的势 ϕ 也满足类似于 (7.6)–(7.7) 的伏拉索夫–泊松方程组 (见习题 5).

7.3. 伏拉索夫 – 麦克斯韦 (Vlasov–Maxwell) 方程组

一般地说, 在运动的带电粒子群体 (如等离子体) 中, 磁场效应是不能忽略的 (见第三章). 在这种情况下, 带电粒子群体就处在由全体粒子的宏观运动所产生的电磁场中. 这时, 就需要对上段所述的伏拉索夫–泊松方程组予以修正.

仍设粒子的质量为 M, 电荷为 q. 又设电磁场的电场强度与磁感强度分别为 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})$. 由电磁场中的洛伦兹力公式 (见第一章 (3.19) 式), 一个带电粒子所受的力为

$$q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{7.12}$$

因此, 粒子的分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 所满足的伏拉索夫方程 (7.1) 变为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f + \frac{q}{M}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f = 0. \tag{7.13}$$

同时, 为简单起见, 假设电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 满足真空中的麦克斯韦方程组 (见第一章 (3.9)–(3.12) 式)

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu_0\boldsymbol{j}, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \tag{7.15}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{7.16}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{7.17}$$

其中 ρ 为电荷密度，$\boldsymbol{j}$ 为电流密度，而 ε_0 及 μ_0 分别为真空中的介电常量及磁导率．电荷密度 ρ 可利用分布函数 f 由下式给出：

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = q\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{7.18}$$

下面再利用分布函数 f 来决定电流密度 $\boldsymbol{j}$. 电流是由带电粒子群体的宏观运动形成的，而带电粒子的宏观运动速度就是粒子的平均速度（见 (2.5) 式)

$$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v.$$

由定义（见第一章 §2.2.1), 电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的方向与 $\boldsymbol{V}$ 相同，其数值等于单位时间内通过垂直于 $\boldsymbol{V}$ 方向的单位面积的电荷量．由于单位时间内通过垂直于 $\boldsymbol{V}$ 方向的单位面积的粒子数为 $n|\boldsymbol{V}|$, 易知电流密度

$$\boldsymbol{j} = q\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v. \tag{7.19}$$

由方程 (7.13)—(7.19) 构成的方程组由描述粒子守恒的伏拉索夫方程及描述电磁场变化的麦克斯韦方程组耦合而成，称为*伏拉索夫–麦克斯韦方程组*.

在讨论伏拉索夫–麦克斯韦方程组的定解问题的提法之前，我们先根据物理上的启示，证明与该方程组的解有关的两个性质.

设粒子所处的范围为全空间 $\mathbb{R}^3$, 则粒子总数为

$$N = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v. \tag{7.20}$$

由粒子数守恒，这个量应不随时间 t 而变．具体地说，我们有下述

定理 7.1. *设 $(f,\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 为伏拉索夫–麦克斯韦方程组 (7.13)—(7.19) 在 $t\geqslant 0$ 时的 C^1 解，且关于变量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 具有紧支集，则*

$$N = 常数, \quad \forall t\geqslant 0, \tag{7.21}$$

其中 N 由 (7.20) 式给出.

证明 利用方程 (7.13), 由 (7.20) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f+\frac{q}{M}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v. \tag{7.22}$$

由于 f 关于 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 具有紧支集, 利用格林公式, 并注意到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都只是 t 及 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0, \tag{7.23}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\nabla_v f\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0 \tag{7.24}$$

及

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\=&-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}_v(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})f\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\=&-\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}_v\boldsymbol{v})f\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0,\end{aligned} \tag{7.25}$$

其中 div_v 及 rot_v 分别表示关于变量 $\boldsymbol{v}$ 取散度及旋度. 在得到 (7.25) 式的过程中, 我们利用了向量分析公式

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b} \tag{7.26}$$

及 $\mathrm{rot}_v\boldsymbol{v}=0$. 将 (7.23)—(7.25) 式代入 (7.22) 式右端, 即得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0,\quad \forall t\geqslant 0.$$

这就证明了定理的结论.

现在考察带电粒子群体的总能量. 由 (2.10) 式, 单位体积中粒子的平均总动能为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{M}{2}|\boldsymbol{v}|^2 f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v;$$

而由第一章 §4.1, 单位体积中粒子的电磁能量即电磁能量密度为

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2+\frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\right).$$

于是总能量为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{M}{2}|\boldsymbol{v}|^2 f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ & + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2+\frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\right)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.27}$$

由能量守恒，这个量也应该不随时间而变. 具体地说，我们有下述

定理 7.2. 设 $(f,\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 为伏拉索夫–麦克斯韦方程组 (7.13)–(7.19) 在 $t\geqslant 0$ 时的 C^1 解，且关于变量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 具有紧支集，则

$$\mathcal{E} = \text{常数}, \quad \forall t\geqslant 0, \tag{7.28}$$

其中 $\mathcal{E}$ 由 (7.27) 式给出.

证明 将方程 (7.13) 两端乘以 $|\boldsymbol{v}|^2$，再关于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 在全空间积分，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\boldsymbol{v}|^2\frac{\partial f}{\partial t}+|\boldsymbol{v}|^2(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ = & -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q}{M}|\boldsymbol{v}|^2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\mathrm{d}x\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{7.29}$$

注意到 f 关于 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 具有紧支集，利用格林公式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{v}|^2(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = 0 \tag{7.30}$$

及

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q}{M}|\boldsymbol{v}|^2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ = & -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}2\frac{q}{M}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})f\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ & -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q}{M}|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{div}_v(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})f\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ = & -2\frac{q}{M}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}f\mathrm{d}x\mathrm{d}v \\ = & -\frac{2}{M}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.31}$$

在得到上式的过程中，我们利用了

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0,\quad \mathrm{div}_v(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0$$

及方程 (7.19). 将 (7.30) 和 (7.31) 式代入 (7.29) 式，并利用方程 (7.14), 即得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{v}|^2 f\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\
=&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{v}|^2\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\
=&\frac{2}{M}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{M}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\\
=&-\frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x+\frac{2}{M}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{7.32}$$

因为 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 具有紧支集，利用向量分析公式 (7.26) 和格林公式不难验证

$$\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}x.$$

这样，注意到方程 (7.15), (7.32) 式可改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}M|\boldsymbol{v}|^2 f\mathrm{d}x\mathrm{d}v+\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x\right)\\
=&2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\\
=&-2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\\
=&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由上式立即有

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \forall t\geqslant 0.\tag{7.33}$$

这就证明了定理的结论.

7.4. 伏拉索夫耦合方程组的数学结构及其定解问题

在伏拉索夫–泊松方程组中，方程 (7.6) 是一个关于未知函数 f 的一阶双曲型偏微分方程，其系数依赖于另一未知函数 ϕ 对 $\boldsymbol{x}$ 的梯度，而方程 (7.7) 则是关于未知函数 ϕ 的泊松方程，其右端由未知函数 f 的积分给出. 因此，该方程组是一个非线性双曲–椭圆耦合的积分微分方程组.

下面着重考察伏拉索夫–麦克斯韦方程组. 首先指出，该方程组中的方程 (7.16) 和 (7.17) 可化为对初始资料的要求. 精确地说，如果 $t=0$ 时

$$f=f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x}),\tag{7.34}$$

且这些初始资料满足相容性条件

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}^0=\frac{q}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v\tag{7.35}$$

及

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}^0=0,\tag{7.36}$$

那么在 $t>0$ 时恒成立

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{q}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v\tag{7.37}$$

及

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\tag{7.38}$$

实际上，以散度算子 div 作用于方程 (7.15) 的两端，并注意到 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$，就有

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\tag{7.39}$$

于是，由 (7.36) 式立刻可得 (7.38) 式. 再以散度算子 div 作用于方程 (7.14) 的两端，并注意到 (7.19) 式，类似地有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}&=-\mu_0\operatorname{div}\boldsymbol{j}\\&=-\mu_0 q\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}f)\mathrm{d}v\\&=-\mu_0 q\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f\mathrm{d}v.\end{aligned}\tag{7.40}$$

再利用伏拉索夫方程 (7.13), 就得到

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\mu_0 q\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}v+\mu_0\frac{q^2}{M}\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\mathrm{d}v. \tag{7.41}$$

注意到在 $|\boldsymbol{v}|\to\infty$ 时, 我们总是假定 f 以足够快的速率趋向于零, 类似于 (7.24) 和 (7.25) 式, 利用格林公式容易验证

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_v f\mathrm{d}v=0. \tag{7.42}$$

于是, (7.41) 式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}-\frac{q}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v\right)=0. \tag{7.43}$$

这样, 由 (7.35) 式就立刻得到 (7.39) 式.

因此, 对伏拉索夫—麦克斯韦方程组来说, 我们只需考虑由方程 (7.13)—(7.15) 及 (7.19) 构成的方程组. 前已说明, 伏拉索夫方程 (7.13) 为关于未知函数 f 的一阶双曲型偏微分方程, 其系数依赖于未知函数 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$, 而麦克斯韦方程组 (7.14)—(7.15) 则是关于未知函数 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的一阶对称双曲型方程组 (见第一章 §5), 但其中 $\boldsymbol{j}$ 由未知函数 f 的积分通过 (7.19) 式给出. 这样, 伏拉索夫—麦克斯韦方程组是一个一阶非线性双曲型积分—偏微分方程组.

最后, 我们讨论上述这些耦合方程组的定解问题的提法. 由于在原则上, 伏拉索夫—泊松方程组中的未知函数 ϕ 可按泊松方程的情形提定解条件, 伏拉索夫—麦克斯韦方程组中的未知函数 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可按麦克斯韦方程组的情形提定解条件 (见第一章), 所以这里只需重点讨论伏拉索夫方程 (7.1) 的定解条件的提法.

伏拉索夫方程 (7.1) 的定解问题仍可分为初值问题及初—边值问题两类.

1) 初值问题 (柯西问题). 设 $T>0$, 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ 中求方程 (7.1) 的解 $f=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, 使其在 $t=0$ 时满足初始条件

$$f(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\quad\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3, \tag{7.44}$$

其中 $f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为给定的函数.

常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g} \tag{7.45}$$

的任一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 称为伏拉索夫方程 (7.1) 的特征线. 由 (7.1) 式, 沿任一特征线, 分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 保持常值. 因此, 分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 具有与初始分布 $f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 同样的上下界. 对于伏拉索夫方程 (7.13) 特征线方程 (7.45) 变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{M}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{7.46}$$

这正是带电粒子在电磁场中运动的动力学方程 (参见第一章 (3.19) 式). 顺便说明, 在不少的实际问题中, 粒子的运动速度可能相当地大, 这就要求对伏拉索夫方程按相对论的要求进行修正 (参见第九章习题 13 及 14).

2) 初边值问题: 设 $T>0$ 及 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, 在 $(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^3$ 中求方程 (7.1) 的解 $f=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, 使其在 $t=0$ 时满足初始条件

$$f(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=f^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\Omega\times\mathbb{R}^3, \tag{7.47}$$

并在边界 $\Gamma=\partial\Omega\times\mathbb{R}^3$ 的某一部分上满足一定的边界条件. 这里指出, 变量 $\boldsymbol{v}$ 的变化范围总是全空间 $\mathbb{R}^3$.

为了说明应该在边界 Γ 的哪一部分上给出边界条件, 并应给出什么形式的边界条件, 我们先从数学的角度来考察一个简单的例子.

例 7.1. 讨论如下的一维伏拉索夫方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial v}=0,\quad t>0,x>0,v\in\mathbb{R}. \tag{7.48}$$

设在 $t=0$ 时给定初始条件

$$f(0,x,v)=f^0(x,v),\quad x>0,v\in\mathbb{R}, \tag{7.49}$$

其中 $f^0(x,v)$ 为已知函数.

方程 (7.48) 的特征线 $x=x(t)$, $v=v(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g. \tag{7.50}$$

由 (7.48) 式，沿任一特征线满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7.51}$$

为简单起见，假设 $g = 0$. 这样，在 (t, x, v) 空间过点 $(0, \alpha, \beta)$ 的特征线为直线

$$x = \beta t + \alpha, \quad v = \beta, \tag{7.52}$$

且沿此特征线

$$f = f^0(\alpha, \beta) = f^0(x - vt, v). \tag{7.53}$$

现在 t 增加时考察该特征线的指向. 由 (7.52) 式不难看出：若 $\beta > 0$, 特征线指向 x 增加的方向，从而在区域边界 $x = 0$ 上，特征线指向求解区域的内部；若 $\beta < 0$, 特征线指向 x 减少的方向，从而在区域边界 $x = 0$ 上，指向求解区域的外部. 因此，由 (7.53) 式，利用在 $x > 0$ 及 $v \in \mathbb{R}$ 上给出的初始条件 (7.49), 能且仅能在区域

$$t > 0, \quad x > 0, \quad v \leqslant 0 \tag{7.54}$$

及

$$t > 0, \quad x > vt, \quad v > 0 \tag{7.55}$$

中决定解

$$f = f^0(x - vt, v). \tag{7.56}$$

为了决定解 f 在区域

$$t > 0, \quad 0 \leqslant x < vt, \quad v > 0 \tag{7.57}$$

中的值，就必须在边界 $x = 0, v > 0$ 处，给出适当的边界条件. 例如，设在这一部分边界上给定边界条件

$$f(t, 0, v) = g^0(t, v), \quad 当\ v > 0\ 时. \tag{7.58}$$

注意到过 $t = \tau, x = 0, v = \beta$ 的特征线为

$$x = \beta(t - \tau), \quad v = \beta, \tag{7.59}$$

而沿此特征线成立

$$f = g^0(\tau, \beta), \tag{7.60}$$

就可以决定 f 在区域 (7.57) 中的值

$$f = g^0\left(t - \frac{x}{v}, v\right) \tag{7.61}$$

这样，我们就得到了定解问题 (7.48)—(7.49) 及 (7.58) 的解. 当然如果要得到连续、甚至光滑的解， $f^0(x,v)$ 与 $g^0(t,v)$ 还应满足一定的相容性条件.

由上述例子可见，形如 (7.58) 的边界条件只需给在满足

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0 \tag{7.62}$$

的部分边界上，其中 $\boldsymbol{n}$ 表示区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量.

此外，仔细考察对上例的讨论不难看出：在所论区域的另一部分边界上，即 $v<0$ 时，给出如下形式的边界条件

$$f(t,0,v) = f(t,0,-v), \quad 当\ v<0\ 时, \tag{7.63}$$

而在相应于 $v>0$ 的那一部分边界上不再给出边界条件，仍可唯一地确定方程的解 f 在整个求解区域上的值. 形如 (7.63) 的边界条件相应于粒子在边界上的镜面反射 (参见下面的 (7.68) 式). 这种反射当然只能产生于满足

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} > 0 \tag{7.64}$$

的那部分边界上.

现在讨论一般的情况. 记

$$\Gamma_- = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\Gamma, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0\}, \tag{7.65}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量. 在 Γ_- 上，由于粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向指向求解区域内部，故有粒子由外部进入到求解区域内部. 此时应给出向区域内发射粒子的分布函数，因此边界条件应具有以下形式：

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f_b(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \quad t>0, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\Gamma_-, \tag{7.66}$$

其中 $f_b(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为给定的函数.

下面讨论边界为固壁的情况. 一般地说，气体 (或其它粒子群体) 在固壁情形的边界层非常复杂. 气体分子在边界层可能被反射、被吸

收，甚至可能形成化学键并分离变成离子．其状态非但依赖于边界的温度，而且依赖于边界的光洁程度．这方面的理论分析与实验数据都还很不充分．一种理想的情形是气体在固壁边界作镜面反射．设在边界上一分子的入射速度为 $\boldsymbol{v}$，经边界镜面反射，其速度变为

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{7.67}$$

（见图 7）．因为入射速度 $\boldsymbol{v}$ 与反射速度 $\boldsymbol{v}'$ 总是成对出现的，所以相应的边界条件应为

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}), \quad t>0,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\Gamma_+, \tag{7.68}$$

其中

$$\Gamma_+ = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\in\Gamma, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}>0\}. \tag{7.69}$$

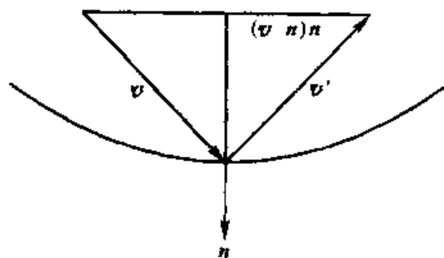


图 7

伏拉索夫–泊松方程组及伏拉索夫–麦克斯韦方程组的定解问题也是近十多年来应用偏微分方程领域中的一个热门研究课题．对伏拉索夫–麦克斯韦方程组（包括相对论及非相对论两种情形），在小初值情况下已证明了其柯西问题整体经典解的存在性（见 [8]），但对一般初值情况，仍是一个没有解决而值得深入研究的问题．其整体弱解的存在性也已得到（见 [9]），但弱解的唯一性尚未解决．顺便指出，对具有一般碰撞项的玻尔兹曼方程柯西问题整体弱解的存在性感兴趣的读者，可参见 [10]．

习 题

1．设气体分子是半径为 r 的刚体球．试求分子刚体碰撞的微分散射截面，并证明其总截面 $\sigma_{\text{tot}} = 4\pi r^2$．

2. 设 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为玻尔兹曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f=J$$

的 C^1 解，且对任何 $t\geqslant 0$，f 关于变量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 是紧支集的. 证明：积分

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

为一个与 $t\geqslant 0$ 无关的常数.

3. 设 $\tilde{J}$ 为由 (6.13) 式定义的希尔伯特空间 H 中的积分算子. 证明该算子为非负的自共轭算子.

4. 利用 $\tilde{a}_i$, b_{ij} 的表达式 (6.24)，直接证明 (6.33) 式对一切守恒量 χ 成立.

5. 设粒子群体的粒子之间受引力 (长程作用力) 的作用，且可忽略碰撞. 证明粒子的分布函数 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 与引力场的势 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ 满足如下的伏拉索夫—泊松方程组：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f+\nabla_x\phi\cdot\nabla_v f=0,\\&-\Delta_x\phi=\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

6. 设 $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 为由伏拉索夫—麦克斯韦方程组决定的粒子的连续可微的分布函数，且对任何 $t\geqslant 0$，f 关于变量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 是紧支集的. 又设 ϕ 为光滑函数，且 $\phi(0)=0$. 证明：积分

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\phi(f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

为一个不随时间 $t\geqslant 0$ 变化的常量.

7. 求解一维伏拉索夫方程的柯西问题：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial v}=0,\quad t>0,(x,v)\in\mathbb{R}^2,\\&f(0,x,v)=f^0(x,v),\end{aligned}$$

其中 g 为常数，$f^0(x,v)$ 为给定的适当光滑函数.

8. 求解下述一维伏拉索夫方程的边值问题：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad t>0,x>0,v\in\mathbb{R},$$
$$f(0,x,v)=f^0(x,v),\quad x>0,v\in\mathbb{R},$$
$$f(t,0,v)=f(t,0,-v),\quad t>0,v<0,$$

其中 $f^0(x,v)$ 为给定的适当光滑函数，并满足相容性条件

$$f^0(0,v)=f^0(0,-v),\quad v<0.$$

参考文献

[1] 小邦德 J W，沃森 K M，小韦尔奇 J A. 气体动力学原子理论. 傅仙罗译. 北京：科学出版社，1986

[2] Chapman S, Cowling T G. *The Mathematical Theory of Non Uniform Gases* Cambrige: Cambrige University Press, 1958

[3] Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. New York: Springer Verlag, 1988

[4] McLennan J A. *Introduction to Non Equilibrium Statistical Mechanics*. New Jersey: Printice Hall, 1989

[5] 霍裕平，郑久仁著. 非平衡态统计理论. 北京：科学出版社，1987

[6] Strauss W A. *Nonlinear Wave Equations.* Providence: American Mathematical Society, 1989

[7] Lions P L. *Modèles Mathématiques des Phénomènes de Transport.* Paris: Ecole Polytechnique, 1994

[8] Glassey R T, Strauss W A. *Absence of shocks in an initial dilute, collisionless plasma.* Comm. Math. Phys., 113(1987). 191～208

[9] Lions P L, DiPerna R. *Global solutions of Vlasov Maxwell system* Comm. Pure Appl. Math., 42(1989). 729～757

[10] DiPerna R, Lions P L. *On the Cauchy problem for Boltzmann equations. Global existence and weak stability results.* Annals of Math., 130(1989). 321～366

第九章 狭义相对论和相对论流体力学

§1. 引 言

1.1. 相对性原理与伽利略 (Galileo Galilei) 变换

物理现象在不同参考系中的表现形式可以是不相同的. 例如，当讨论由一个点电荷所激发的电磁场时，必须确定此点电荷是静止的还是运动的. 如果该点电荷是静止的，那么它只激发静电场；如果是运动的，那么它除了激发电场外还激发磁场. 而为了确定该点电荷是静止的还是运动的，必须先确定它所在的参考系. 但在一个参考系中是静止的点电荷，在另一个参考系中可能是运动的. 因此，上述物理现象在不同参考系中的表现形式是不同的. 由于参考系的选取可以相当任意，而同一物理现象在不同参考系中又可以有不同的表现形式，那么，作为反映物理现象客观规律的物理定律，在不同的参考系中是否也应具有不同的形式呢？如果是这样的话，描述同一个物理现象的物理定律的形式将五花八门，而失去客观的标准，这显然是不合理的. 因此，物理定律在一切相应的参考系中应该具有相同的形式. 这就是 *相对性原理*.

首先看经典的牛顿力学. 我们知道，牛顿定律的表现形式对所有惯性系均成立，而所谓惯性系就是指牛顿第一定律 (惯性定律) 成立的参考系. 一切相对于某惯性系作匀速直线运动的参考系仍为惯性系. 这样，牛顿力学满足如下 *相对性原理*: 所有的物理定律在惯性系中都具有相同的形式. 它在数学上的描述就是: 在将一个惯性系转换到另一个惯性系的时空变换下，物理定律的形式保持不变. 至于惯性系之间的时空变换的形式则依赖于我们有关时间与空间的观念. 在牛顿力学中，认为时间和空间具有绝对的意义，不依赖于所选取的参考系. 这就是说，两个事件的时间间隔以及刚体上两点的空间距离均与所选的参考系无关. 在这种认识下，惯性系之间的时空变换称为 *伽利略变换*，而相应的相对性原理则称为 *伽利略相对性原理*.

设 K 及 $\overline{K}$ 为两个惯性系,其中的时空坐标系分别为 (t, x_1, x_2, x_3) 与 $(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, 并设 $\overline{K}$ 以常速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于 K 作直线运动. 为了讨论简单起见, 我们可以假定在两个参考系中, 坐标轴的方向都是一致的. 这样, 只要适当选取时间与空间的原点, 伽利略变换可写为

$$\begin{cases} \bar{t} = t, \\ \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}t. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 等.

下面我们说明, 牛顿方程 (即牛顿第二定律) 在伽利略变换 (1.1) 下保持形式不变. 设在参考系 K 中, 牛顿方程的形式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}. \tag{1.2}$$

在伽利略变换 (1.1) 下, 显然有

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\bar{t}^2}. \tag{1.3}$$

此外, 在牛顿力学中, 质点的质量亦假定与参考系无关, 即

$$\bar{m} = m, \tag{1.4}$$

这里以 $\bar{m}$ 表示质点在参考系 $\overline{K}$ 中的质量. 至于作用在质点上的力 $\boldsymbol{f}$, 一般是时间 (如周期强迫力)、相对距离 (如万有引力) 或相对速度 (如摩擦力) 的函数. 在伽利略变换下, 时间与相对距离显然保持不变, 容易验证相对速度也不变. 因此, 作用力在不同的惯性系下是相同的, 即

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}, \tag{1.5}$$

这里 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 表示在参考系 $\overline{K}$ 中的作用力. 综合 (1.3)—(1.5) 式, 我们有

$$\bar{m}\frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\bar{t}^2} = \bar{\boldsymbol{f}}. \tag{1.6}$$

这表明牛顿方程在惯性系 $\overline{K}$ 中与在惯性系 K 中具有同样的形式. 对牛顿第三定律有同样的结果. 因此, 牛顿力学满足伽利略相对性原理, 经典力学方程在伽利略变换下形式保持不变.

1.2. 麦克斯韦电磁场理论与伽利略相对性原理

现在来考察描述电磁场变化规律的麦克斯韦方程组(见第一章). 已知, 在没有电荷及电流时, 真空中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 分别满足波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.7}$$

及

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.8}$$

(见第一章 (5.27) 式及 (5.28) 式, 这两个方程告诉我们, 电磁场在真空中以波的形式传播, 其传播速度为 $c = 3\times 10^8$ m/s. 设电磁场方程在惯性系 K 中具有上述形式, 可以验证, 在由 K 转换到另一惯性系 $\overline{K}$ 的伽利略变换 (1.1) 下, 方程 (1.7) 与 (1.8) 将不再保持原来的形式. 直接从物理上进行分析也能得到同一结论. 事实上, 由于方程 (1.7) 与 (1.8) 关于空间变量 x_1, x_2, x_3 的对称性, 在惯性系 K 中, 电磁波以相同的速度 c 向各个方向传播, 其传播速度 c 是各向同性的. 但根据伽利略变换 (1.1), 在参考系 $\overline{K}$ 以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对 K 运动时, 由速度的叠加性, 在参考系 $\overline{K}$ 中电磁波沿不同方向的传播速度应该不同 (沿 $\boldsymbol{V}$ 的方向, 传播速度为 $c-|\boldsymbol{V}|$; 而沿 $\boldsymbol{V}$ 的相反方向, 传播速度为 $c+|\boldsymbol{V}|$). 这一特点必然要反映在参考系 $\overline{K}$ 中的方程里, 从而在 $\overline{K}$ 中麦克斯韦方程不可能仍具有 (1.7) 与 (1.8) 的形式. 这说明麦克斯韦方程组在不同惯性系中的形式不同, 因此不满足伽利略相对性原理.

这样, 我们面临着下面三个可能的选择:

1° 麦克斯韦方程组是不正确的, 正确的电磁场方程应在伽利略变换下不变.

2° 伽利略相对性原理只适用于经典力学, 对电磁理论不成立. 在电磁理论中, 存在一种特殊而优越的参考系, 电磁场方程在此参考系中具有麦克斯韦方程组的形式.

3° 相对性原理仍然是普遍适用的物理规律, 但时空观要作根本性的改变, 不能认为时间和空间具有绝对的意义. 相反, 随着从一个惯性系到另一个惯性系的变换, 时间与长度均可能改变. 这就是说, 惯性系之间的变换不再是伽利略变换.

自 1861 年麦克斯韦建立电磁学方程组以后, 到 19 世纪末, 由于赫兹 (H. R. Hertz)、洛伦兹以及其它一些人的努力, 这一理论获得惊人的成功, 已为大家所普遍接受, 要否定它几乎是不可能的. 所以余下

只有 2° 和 3° 这两种选择. 在爱因斯坦 (A. Einstein) 之前, 绝大多数物理学家采纳了第 2° 种选择, 力图对已有的理论进行修补. 那么这种使麦克斯韦方程组成立的特殊优越的参考系是一种什么参考系呢?

我们知道, 机械波是在介质中传播的. 以一维弹性杆的微小纵振动为例, 它满足下述方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.9}$$

(见, 例如 [1]), 其中 $a^2 = E/\rho$, 而 E 为材料的弹性模量, ρ 为杆的线密度. 当时的物理学家以机械波的模式来理解电磁波, 认为真空中存在一种介质 —— 以太 (ether), 电磁波在这种介质中以速度 c 传播, 而麦克斯韦方程组就在以太这一惯性系中成立. 这样, 由于 c 具有很大的数值, 以太就应是一种弹性模量非常大、而密度又非常小的透明介质, 光作为一种电磁波在其中以速度 c 传播.

但是, 如果接受这一假设, 在相对于以太运动的物体 (例如地球) 上, 光 (电磁波) 的传播速度就应与 c 不同. 此外, 由在地球上测得的光速与在以太中光速的差异, 还应可推出地球相对于以太的运动速度. 但实际测量的结果却大出人们的预料. 1887 年迈克耳孙 (A. A Michelson) 和莫雷 (E. W. Morley) 的实验否定了由光速的差异测出地球相对以太运动速度的可能性.

这样一来, 3° 就成了唯一可能的选择. 这就是说, 相对性原理不仅对经典力学, 而且对电磁 (包括光) 现象也是成立的. 于是, 麦克斯韦方程组在一切惯性系中都应具有相同的形式, 真空中的光速 c 在一切惯性系中均有相同的数值. 如前所述, 后一结论与传统的牛顿时空观是完全对立的, 而这正是爱因斯坦狭义相对论的出发点.

§2. 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换

2.1. 狭义相对论的基本假设

1905 年, 年仅 26 岁的瑞士专利局专利审查员爱因斯坦分析了当时物理学的成果, 在德国最有声望的杂志《物理学年鉴》 (Annalen der Physik) 上发表了题为《论动体的电动力学》这篇划时代的论文. 这篇论文及其同年发表的另一篇论文奠定了狭义相对论的基础, 是狭义相对论诞生的标志.

爱因斯坦的理论依赖于以下两条基本假设.

1) 相对性原理：物理定律在所有惯性系中具有相同的形式.

这一条假设形式上与伽利略相对性原理没有什么不同. 但在伽利略相对性原理中，当从一个惯性系转换到另一个惯性系时，相应的时空坐标的转变由伽利略变换给出. 这是由于假定存在着绝对的时间与空间，即时间间隔与长度 (两点间的距离) 不随惯性系的不同选取而改变. 现在既然采取了相对性原理，麦克斯韦方程组便在一切惯性系中成立，从而很自然地，爱因斯坦便以与经典的牛顿力学相违背的光速不变原理取代了时间与空间的绝对性.

2) 光速不变原理：对所有的惯性系，光在真空中沿一切方向的传播速度都是 c.

2.2. 洛伦兹变换

这一变换是狭义相对论的核心和数学表达形式，是荷兰物理学家洛伦兹总结了他关于电磁场多年的研究成果于 1904 年提出来的. 著名的法国科学家庞加莱 (H. Poincaré) 对洛伦兹的工作特别推崇，并将该变换称为洛伦兹变换.

在爱因斯坦的上面两条假设下，现在考察从一个惯性系 K 转换到另一个惯性系 $\overline{K}$ 时，其相应的时空坐标 (t,x_1,x_2,x_3) 和 $(\overline{t},\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$ 之间的变换关系是什么？设

$$\begin{cases} \overline{t} = f_0(t,x_1,x_2,x_3), \\ \overline{x}_i = f_i(t,x_1,x_2,x_3) \quad (i=1,2,3) \end{cases} \tag{2.1}$$

我们有

(1) 变换 (2.1) 是线性的.

只有这样，才能保证相对于 K 作匀速直线运动的任何物体相对于 $\overline{K}$ 也作匀速直线运动. 这体现了时间与空间的均匀性. 这样，除去平移外，(2.1) 应是如下形式的可逆线性变换：

$$\overline{x}_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} x_\beta \quad (\alpha = 0,\cdots,3), \tag{2.2}$$

其中 $a_{\alpha\beta}$ 为常数，且为表达方便，已将 t 与 $\overline{t}$ 分别记为 x_0 与 $\overline{x}_0$.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{3}(\Delta x_i)^2 - (c\Delta t)^2$ 为上述变换下的不变量.

事实上，根据光速不变原理，在惯性系 K 中 t 时刻在 (x_1, x_2, x_3) 点发出的光，在 $t+\Delta t$ 时的波前为一个以 (x_1, x_2, x_3) 为球心、$c\Delta t$ 为半径的球面：

$$\sum_{i=1}^{3}(\Delta x_i)^2 - (c\Delta t)^2 = 0, \tag{2.3}$$

其中 $\Delta x_i = X_i - x_i\ (i = 1,2,3)$，而 $(X_1, X_2, X_3) = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ 为此球面上的变点. 当变换到参考系 $\overline{K}$ 时，$(t, x_1, x_2, x_3) \to (\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$，$(t+\Delta t, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) \to (\bar{t}+\Delta\bar{t}, \bar{x}_1+\Delta\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta\bar{x}_2, \bar{x}_3+\Delta\bar{x}_3)$，且根据光速不变原理，此时波前为球面

$$\sum_{i=1}^{3}(\Delta\bar{x}_i)^2 - (c\Delta\bar{t})^2 = 0. \tag{2.4}$$

考虑到变换 (2.2) 是线性的，而且波前应对应于波前，由 (2.3) 和 (2.4) 式就得出

$$\sum_{i=1}^{3}(\Delta\bar{x}_i)^2 - (c\Delta\bar{t})^2 = k\left(\sum_{i=1}^{3}(\Delta x_i)^2 - (c\Delta t)^2\right), \tag{2.5}$$

其中 k 为一个常数. 因为两个惯性系 K 和 $\overline{K}$ 的地位完全是对称的，同样应有

$$\sum_{i=1}^{3}(\Delta x_i)^2 - (c\Delta t)^2 = k\left(\sum_{i=1}^{3}(\Delta\bar{x}_i)^2 - (c\Delta\bar{t})^2\right).$$

这样就有 $k^2 = 1$，即 $k = \pm 1$. 注意到 (2.5) 式是一个二次型在可逆线性变换 (2.2) 下的变换关系，由二次型的惯性定理，应有 $k = 1$. 这就证明了结论 (2).

由于 (2.2) 式是一个齐次线性变换，显然结论 (2) 等价于

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - (ct)^2 \tag{2.6}$$

为变换 (2.2) 的不变量.

满足 (2)，即以 (2.6) 为不变量的线性变换 (2.2)，就称为洛伦兹变换.

为了得到洛伦兹变换的一般形式，下面首先讨论一种特殊情形.在变换中 x_2, x_3 保持不变，即设变换为

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \\ \bar{x}_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 = x_3. \end{cases} \tag{2.7}$$

将上述变换代入不变量表达式 (2.6)，得

$$(a_{10}x_0 + a_{11}x_1)^2 - c^2(a_{00}x_0 + a_{01}x_1)^2 = x_1^2 - c^2x_0^2.$$

分别比较上式两端 x_0^2, x_0x_1 及 x_1^2 项的系数，有

$$\begin{cases} a_{10}^2 - c^2a_{00}^2 = -c^2, \\ a_{10}a_{11} - c^2a_{00}a_{01} = 0, \\ a_{11}^2 - c^2a_{01}^2 = 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

由变换 (2.7) 的第二式不难看出，由该变换确定的参考系 $\overline{K}$ 相对于参考系 K 沿 x_1 方向以速度

$$V = -\frac{a_{10}}{a_{11}} \tag{2.9}$$

作匀速直线运动. 利用 (2.8) 的第二式，可由其第一与第三式得到

$$\begin{aligned} a_{00}^2 &= a_{11}^2, \\ a_{01}^2 &= \frac{1}{c^4}a_{10}^2. \end{aligned}$$

再利用 (2.9) 式及以上两式，由 (2.8) 的第一与第三式可以分别解得

$$\begin{aligned} a_{00}^2 &= a_{11}^2 = \gamma^2, \\ a_{01}^2 &= \frac{1}{c^4}a_{10}^2 = \frac{\gamma^2V^2}{c^4}, \end{aligned}$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$. 由此，由 (2.9) 式定义的 V 必须满足 $|V| < c$.

由于必要时可先施行关于 x_0 及 x_1 的反射变换 (它们都是洛伦兹变换)，总可以假设 $a_{00} > 0$ 及 $a_{11} > 0$. 这样，就有

$$a_{00} = \gamma, \quad a_{11} = \gamma.$$

再利用 (2.9) 式与 (2.8) 的第二式，又有

$$a_{10} = \gamma V, \quad a_{01} = -\gamma \frac{V}{c^2}.$$

将上述结果代入 (2.7) 式，即得一类特殊的洛伦兹变换

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = \gamma\left(x_0 - \dfrac{V}{c^2}x_1\right), \\ \overline{x}_1 = \gamma(-Vx_0 + x_1), \\ \overline{x}_2 = x_2, \\ \overline{x}_3 = x_3, \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 V 为一实常数，满足 $|V| < c$，而 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$. 反之，对任意满足 $|V| < c$ 的实常数 V (从而可求得相应的 γ 值)，(2.10) 式给出一个洛伦兹变换.

有了特殊形式的洛伦兹变换 (2.10)，一般的洛伦兹变换可由下述定理给出.

定理 2.1. 任一洛伦兹变换都是关于变量 x_1, x_2, x_3 (x_0 保持不变) 的正交变换、形如 (2.10) 的变换以及反射变换 (使某一变量改变符号的变换) 三者的复合.

证明 设洛伦兹变换由 (2.2) 式给出.

首先考察 a_{01}, a_{02} 及 a_{03} 不全为零的情况. 对变量 x_1, x_2 及 x_3 施行正交变换：$(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3)$，使

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 = \alpha y_1, \tag{2.11}$$

其中 α 为一个适当的非零常数. 这总是可以做到的. 再令 $y_0 = x_0$. 由于在正交变换下，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 是不变量，所以变换

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

是洛伦兹变换.

经过上述洛伦兹变换，(2.2) 式化为

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = a_{00}y_0 + \alpha y_1, \\ \overline{x}_1 = a_{10}y_0 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3, \\ \overline{x}_2 = a_{20}y_0 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3, \\ \overline{x}_3 = a_{30}y_0 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3. \end{cases} \tag{2.12}$$

它仍是一个洛伦兹变换. 此时必有

$$c^2\alpha^2 < a_{00}^2. \tag{2.13}$$

事实上, 由洛伦兹变换的定义, 有

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - c^2\bar{x}_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - c^2y_0^2. \tag{2.14}$$

特别取 $\bar{x}_0 = 0$. 此时由 (2.12) 的第一式得 $y_0 = -\dfrac{\alpha}{a_{00}}y_1$. 代入 (2.14) 式, 得

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = \left(1 - \frac{c^2\alpha^2}{a_{00}^2}\right)y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

当 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0$ 时, 上式右端必为正. 否则将有 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$. 再注意到 $\bar{x}_0 = 0$, 即得 $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, 而发生矛盾. 因此必有

$$1 - \frac{c^2\alpha^2}{a_{00}^2} > 0,$$

即 (2.13) 式成立.

令 $V = -c^2\alpha/a_{00}$. 由 (2.13) 式知 $|V| < c$. 对于这个给定的 V 值 (从而相应的 γ 值), 再施行形如 (2.10) 的洛伦兹变换

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \gamma\left(y_0 - \dfrac{V}{c^2}y_1\right), \\ \bar{y}_1 = \gamma(-Vy_0 + y_1), \\ \bar{y}_2 = y_2, \\ \bar{y}_3 = y_3. \end{cases} \tag{2.15}$$

注意到 (2.15) 的第一式可写为

$$\bar{y}_0 = \frac{\gamma}{a_{00}}(a_{00}y_0 + \alpha y_1),$$

将 (2.15) 代入 (2.12) 式, 就得到

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = c_{00}\bar{y}_0, \\ \bar{x}_1 = c_{10}\bar{y}_0 + c_{11}\bar{y}_1 + c_{12}\bar{y}_2 + c_{13}\bar{y}_3, \\ \bar{x}_2 = c_{20}\bar{y}_0 + c_{21}\bar{y}_1 + c_{22}\bar{y}_2 + c_{23}\bar{y}_3, \\ \bar{x}_3 = c_{30}\bar{y}_0 + c_{31}\bar{y}_1 + c_{32}\bar{y}_2 + c_{33}\bar{y}_3, \end{cases} \tag{2.16}$$

其中 $c_{00}=a_{00}\gamma$. 它仍是一个洛伦兹变换.

因此, 如果在 (2.2) 式中 a_{01}, a_{02} 与 a_{03} 不全为零, 总可以通过关于 x_1、x_2 及 x_3 的正交变换以及形如 (2.10) 的洛伦兹变换, 将 (2.2) 式化为形如 (2.16) 的变换. 而如果在 (2.2) 式中 $a_{01}=a_{02}=a_{03}=0$, 则变换 (2.2) 已经具有 (2.16) 的形式. 这样, 我们只需讨论形如 (2.16) 的洛伦兹变换.

在 (2.16) 式中特别取 $y_0=1$ 及 $\overline{y}_1=\overline{y}_2=y_3=0$, 就有

$$x_0=c_{00},\quad \overline{x}_1=c_{10},\quad \overline{x}_2=c_{20},\quad x_3=c_{30}.$$

将它们代入不变量 (2.6), 即得

$$c^2c_{00}^2-c_{10}^2-c_{20}^2-c_{30}^2=c^2. \tag{2.17}$$

由此立即得到

$$c_{00}^2\geqslant 1 \tag{2.18}$$

另一方面, 在 (2.16) 式中特别取 $x_0=1$ 及 $x_1=\overline{x}_2=\overline{x}_3=0$, 就有 $\overline{y}_0=1/c_{00}$, 而 $\overline{y}_1, \overline{y}_2, y_3$ 则分别取相应的值 $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$. 将它们代入不变量 (2.6), 即得

$$\frac{c^2}{c_{00}^2}-\tilde{y}_1^2-\tilde{y}_2^2-\tilde{y}_3^2=c^2.$$

因此又有

$$c_{00}^2\leqslant 1. \tag{2.19}$$

由 (2.18) 与 (2.19) 式得 $c_{00}^2=1$. 于是 (2.17) 式给出

$$c_{10}=c_{20}=c_{30}=0.$$

这样, 变换 (2.16) 实际上应具如下形式:

$$\begin{cases}\overline{x}_0=\pm\overline{y}_0,\\ x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3,\\ \overline{x}_2=c_{21}\overline{y}_1+c_{22}y_2+c_{23}\overline{y}_3,\\ x_3=c_{31}y_1+c_{32}\overline{y}_2+c_{33}\overline{y}_3\end{cases} \tag{2.20}$$

由这一洛伦兹变换的特殊形式可知, $\overline{y}_1^2+\overline{y}_2^2+y_3^2$ 是不变量, 即 (2.20) 的后三式给出的变换 $(\overline{y}_1, y_2, \overline{y}_3)\rightarrow(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ 是一个正交变换; 而

取负号情形的 (2.20) 的第一式则是一个关于变量 $\bar{y}_0$ 的反射. 定理证毕.

利用上述定理, 不难验证: 波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{2.21}$$

在洛伦兹变换下其形式保持不变. 反之可以证明: 任一使波动方程 (2.21) 形式保持不变的可逆线性变换 (2.2), 一定是洛伦兹变换和相似变换 $\bar{x}_i = ax_i\ (i = 0,1,2,3)$ ($a \neq 0$ 常数) 的复合 (见 [2]).

如前所述, 洛伦兹变换 (2.10) 是惯性系 $\bar{K}$ (其上的时空坐标为 $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$) 相对于惯性系 K (其上的时空坐标为 (x_0, x_1, x_2, x_3)) 沿 x_1 方向以速度 V 作匀速直线运动时, 它们之间的时空坐标变换. 为了下面 §5 的需要, 我们进一步考察惯性系 $\bar{K}$ 相对于惯性系 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 作匀速直线运动时, 其时空坐标变换关系具有怎样的形式? 下一定理回答了这一问题.

定理 2.2. 设在某时刻 (如 $x_0 = 0\ (t = 0)$ 时), 惯性系 K 与 $\bar{K}$ 的时空坐标系重合, 然后 $\bar{K}$ 以常速度 $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ 相对于 K 作直线运动. 以 (x_0, x_1, x_2, x_3) 与 $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ 分别表示 K 与 $\bar{K}$ 中的时空坐标 (见图 1), 它们之间的关系由如下的洛伦兹变换给出:

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= \gamma\left(x_0 - \frac{V_1}{c^2}x_1 - \frac{V_2}{c^2}x_2 - \frac{V_3}{c^2}x_3\right),\\ \bar{x}_i &= -\gamma V_i x_0 + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\gamma - 1}{V^2}V_iV_j + \delta_{ij}\right)x_j \quad (i = 1,2,3),\end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$, $V = |\boldsymbol{V}|$, 而 δ_{ij} 是克罗内克符号.

证明 首先在保持时间坐标 x_0 不变的情况下, 对空间坐标系作一个旋转变换, 使 y_1 轴正向与 $\boldsymbol{V}$ 的方向相同. 这一变换可写为

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \quad (i = 1,2,3), \end{cases} \tag{2.23}$$

其中 (a_{ij}) 为正交阵,

$$\det(a_{ij}) = 1, \tag{2.24}$$

且

$$a_{11} = \frac{V_1}{V}, \quad a_{12} = \frac{V_2}{V}, \quad a_{13} = \frac{V_3}{V}. \tag{2.25}$$

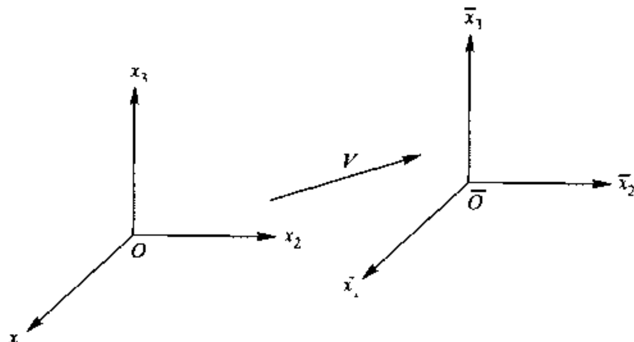


图 1

在参考系 K 与 $\overline{K}$ 中分别作形如 (2.23) 的变换, 所得的时空坐标分别记为 (y_0, y_1, y_2, y_3) 及 $(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$. 在新的坐标系下, $\overline{K}$ 沿 y_1 方向以速度 V 相对于 K 作匀速直线运动. 由 (2.10) 与 (2.23) 式, 我们有

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \gamma\left(y_0 - \dfrac{V}{c^2} y_1\right) \\ \qquad = \gamma\left(x_0 - \dfrac{V}{c^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j\right), \\ \bar{y}_1 = \gamma(-V y_0 + y_1) \\ \qquad = \gamma\left(-V x_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j\right), \\ \bar{y}_2 = y_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{2j} x_j, \\ \bar{y}_3 = y_3 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{3j} x_j. \end{cases} \tag{2.26}$$

再将 $(y_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ 变换回原来的时空坐标 $(x_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. 由相应的 (2.23) 式，并注意到正交阵的逆阵为其转置阵，就得到

$$
\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j=1}^{3} a_{ji} y_j \\
&= a_{1i}\gamma\left(-Vx_0 + \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j\right) \\
&\quad + a_{2i}\sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j + a_{3i}\sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j \\
&= -\gamma a_{1i}Vx_0 + (\gamma - 1)\sum_{j=1}^{3} a_{1i}a_{1j}x_j + \sum_{j,k=1}^{3} a_{ki}a_{kj}x_j \\
&= -\gamma V_i x_0 + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\gamma-1}{V^2}V_iV_j + \delta_{ij}\right)x_j \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

这里我们利用了 (2.25) 式以及矩阵 (a_{ij}) 的正交性. 这就证明了 (2.22) 的第二式.

注意到 $x_0 = \bar{y}_0$ 及 (2.25) 式，由 (2.26) 的第一式立即得到 (2.22) 的第一式. 定理证毕.

容易看出，当 $c \to \infty$ 时，洛伦兹变换 (2.22) 即变成伽利略变换 (1.1).

§3. 狭义相对论的时空观

3.1. 同时的相对性

在经典的牛顿时空里，时间是绝对的. 牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》中曾写道："绝对的、真正的和数学的时间本身，就其本性而言，是不受任何外在事物影响而均匀流逝的." 根据这种时间观，说在不同地点发生的两个事件是同时发生的，至少在理论上意义是明确的. 在相对论里，是否可以脱离参考系而说发生在不同地点的两个事件是同时发生的呢？

首先指出，对于在某一参考系中发生于空间同一地点的两个事件，其时间先后次序 (包括同时性) 在任何参考系中都是不变的. 这一点由洛伦兹变换式 (2.10) 容易看出 (亦见下面的 (3.1) 式).

对于发生在空间不同地点的两个事件，先从一个例子出发来进行考察. 设有一列火车以恒定的速度 V 沿路轨行驶. 对铁路路基来说同时发生的两个事件 (例如 A、B 两处同时发出的光脉冲)，对火车来说是否仍是同时发生的呢？下面将说明，从相对论的观点，回答应该是否定的.

事实上，我们说 A、B 两处发出的光脉冲相对于路基而言是同时的，意味着在 A、B 两处发出的光脉冲在路基上 $[A, B]$ 段的中点 M 处相遇. 设 A、B 两处发光时，正好分别与火车上的 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 两点重合，并设 $\overline{M}$ 为火车上 $[\overline{A}, \overline{B}]$ 段的中点. 当以火车为参考系时，若这两个事件仍是同时发生的，则根据光速不变原理，A、B 两处发出的光脉冲应在 $\overline{M}$ 处相遇. 但以路基作参考系，$\overline{M}$ 以速度 V 向右运动 (见图 2)，迎向来自 B 处的光线. 因此，发自 B 处的光线应先达到 $\overline{M}$ 处. 由于对在某一参考系中发生于空间同一地点的两个事件，其先后次序在任何参考系中都是不变的，若以火车作为参考系，B 处的光脉冲的发生就先于 A 处的光脉冲，两个事件不是同时的.

现在我们用洛伦兹变换来分析上述现象. 设有两个参考系 K 及 $\overline{K}$, $\overline{K}$ 相对于 K 沿 x_1 方向以常速度 V 运动. 假定两个事件 A 及 B 在 K 中的时空坐标分别为 (t^A, x^A) 与 (t^B, x^B)，而在 $\overline{K}$ 中的时空坐标分别为 $(\bar{t}^A, \bar{x}^A)$ 与 $(\bar{t}^B, \bar{x}^B)$. 因为运动沿 x_1 方向进行，为叙述简单起见，这儿我们省略了另外两个空间坐标 x_2, x_3, 而将 x_1 记为 x. 由洛伦兹变换 (2.10)，有

$$
\begin{aligned}
\bar{t}^A &= \gamma\left(t^A - \frac{V}{c^2}x^A\right), \\
\bar{t}^B &= \gamma\left(t^B - \frac{V}{c^2}x^B\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\bar{t}^B - \bar{t}^A = \gamma\left(t^B - t^A - \frac{V}{c^2}(x^B - x^A)\right) \tag{3.1}
$$

若 A、B 这两个事件在 K 中是同时的，即 $t^A = t^B$，就有

$$
\bar{t}^B - \bar{t}^A = \gamma\frac{V}{c^2}(x^A - x^B) \tag{3.2}
$$

设 $V>0$. 由上式可见，若 $x^B > x^A$，则 $\bar{t}^B < \bar{t}^A$，于是对 $\overline{K}$ 系来说，事件 B 发生在先，事件 A 在后；若 $x^B < x^A$，则 $\bar{t}^A < \bar{t}^B$，对 $\overline{K}$ 系来说，事件 A 发生在先，事件 B 在后. 这和前面对火车这一例子的分析是一致的.

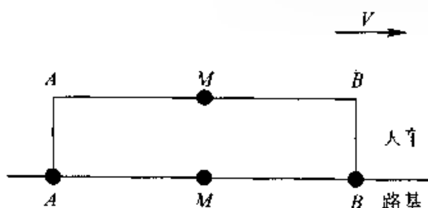


图 2

由上述分析可以看出，对不同的参考系没有共同的时间；两个事件的同时性没有绝对的意义. 这说明，对一个惯性系来说发生在不同地点的两个事件虽然是同时发生的，而对另一个惯性系来说，这两个事件却往往不是同时发生的. 这就是同时的相对性，它是爱因斯坦的时间观和时空理论的基础.

进一步我们要问，是否会出现如下现象：在惯性系 K 中，事件 A 先于 B 发生，而在另一惯性系 $\overline{K}$ 中，事件 B 却先于 A 发生呢？如果回答是肯定的，那么是否会发生因果颠倒的现象呢？

下面我们证明：如果两个事件有因果关系，即一个事件是另一个事件的结果，那么它们之间的先后次序是不容颠倒的. 仍用洛伦兹变换来讨论这一问题. 在 (3.1) 式中，设 $t^A < t^B$，即在 K 系中，事件 A 先于 B 发生，那么成立 $\bar{t}^A > \bar{t}^B$，即在 $\overline{K}$ 系中事件 B 先于 A 发生的充要条件是

$$t^B - t^A < \frac{V}{c^2}(x^B - x^A), \tag{3.3}$$

即

$$\frac{x^B - x^A}{t^B - t^A}V > c^2. \tag{3.4}$$

假定所有物质、作用或影响的传输速度都不超过光速 c (参见本节第 5 段)，那么对于具有因果关系的两个事件 A 与 B，必有

$$\left|\frac{x^B - x^A}{t^B - t^A}\right| \leqslant c. \tag{3.5}$$

此外，还有

$$|V| \leqslant c.$$

所以 (3.4) 式不可能成立.

上述结果可以利用光锥的概念更清楚地表示出来. 对于一个事件 (t^A, x^A)，利用条件 (3.5) 可以看出，可能与该事件有因果关系的事件 (t, x) 由下式给出：

$$(x - x^A)^2 - c^2(t - t^A)^2 \leqslant 0. \tag{3.6}$$

它所确定的区域是 (t, x) 平面上由波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

的过 (t^A, x^A) 点的两条特征线

$$x - x^A = \pm c(t - t^A) \tag{3.7}$$

所夹的区域 (见图 3 阴影部分). 区域 I 内部的点所表示的事件肯定比点 (t^A, x^A) 表示的事件早，可以成为事件 (t^A, x^A) 的因；而区域 II 内部的点所表示的事件则肯定比 (t^A, x^A) 表示的事件晚，可以成为事件 (t^A, x^A) 的果. 至于阴影区域之外的点所表示的事件则与事件 (t^A, x^A) 没有因果关系：它与事件 (t^A, x^A) 的时间次序只有相对的意义，在从一个惯性系变换到另一个惯性系时，时间次序可能颠倒.

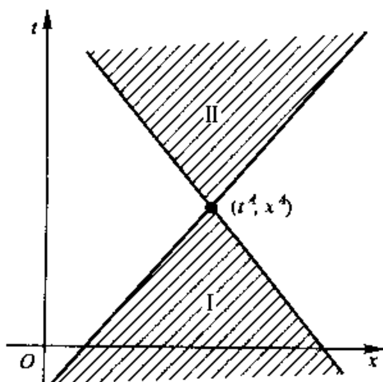


图 3

在四维空间中，给定一个由时空坐标 $(t^A, x_1^A, x_2^A, x_3^A)$ 表示的事件 A，波动方程 (2.21) 过该点的特征锥面为 (见 [1])

$$(x_1 - x_1^A)^2 + (x_2 - x_2^A)^2 + (x_3 - x_3^A)^2 - c^2(t - t^A)^2 = 0 \quad (3.8)$$

它所围的区域 I 与 II (见图 4) 中的点分别对应于发生在事件 A 之前与之后的事件，即可以成为其因与果的事件．特征锥 (3.8) 称为光锥．

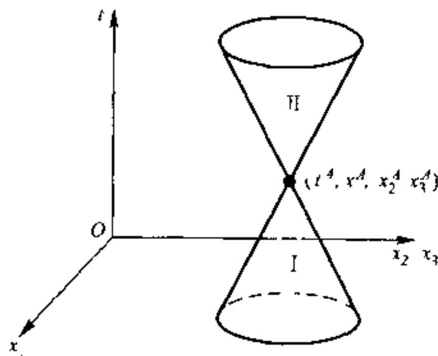


图 4

3.2. 运动时间的膨胀

经典物理中时间的绝对性，即两个事件的时间间隔与参考系的运动状态无关，是导出伽利略变换的依据之一．上段讨论的同时的相对性说明，按相对论的时空观，不存在脱离参考系的绝对时间．下面进一步讨论运动对时间 (间隔) 的影响．

考虑一个物理过程，例如晶体的弹性振动．设晶体静止时其振动周期为 T_0，我们来考察晶体的运动对其振动周期的影响．设晶体相对于惯性系 K 以常速度 V 沿 x_1 (记为 x) 方向运动，而相对于惯性系 $\overline{K}$ 静止，即 $\overline{K}$ 为随晶体运动的参考系．又设晶体相邻两次振幅达到最大值的事件在 K 系中的时空坐标分别为 (t^A, x^A) 与 (t^B, x^B)，而在 $\overline{K}$ 系中分别为 $(\overline{t}^A, \overline{x}^A)$ 与 $(\overline{t}^B, \overline{x}^B)$．因为晶体相对于 $\overline{K}$ 系是静止的，故 $\overline{x}^A = \overline{x}^B$．由洛伦兹变换 (2.10) 中的第一、二两式可解得

$$t = \gamma\left(\overline{t} + \frac{V}{c^2}\overline{x}\right). \quad (3.9)$$

这也可由 K 系相对于 $\overline{K}$ 系沿 x_1 方向以速度 $-V$ 运动而得．由 (3.9)

式，我们有

$$t^A = \gamma\left(\bar{t}^A + \frac{V}{c^2}\bar{x}^A\right),$$

$$t^B = \gamma\left(\bar{t}^B + \frac{V}{c^2}\bar{x}^B\right)$$

两式相减，并注意到 $\bar{x}^A = \bar{x}^B$，就得到

$$t^B - t^A = \gamma(\bar{t}^B - \bar{t}^A) \tag{3.10}$$

因为晶体在惯性系 $\bar{K}$ 中静止，所以 $\bar{t}^B - \bar{t}^A = T_0$. 于是晶体以速度 V 运动时的振动周期，即在惯性系 K 中测得的晶体的振动周期为

$$T = t^B - t^A = \gamma T_0 \tag{3.11}$$

因为 $\gamma > 1$，上式说明晶体运动时的振动周期比静止时延长了.

对于任意两个事件之间的时间间隔都有类似的结果. 运动物体时间的膨胀，或者通俗地说，运动的时钟变慢，是一切发生在运动物体上的物理过程所具有的一种基本的时空属性，它在基本粒子物理中已得到了大量实验的证明.

3.3. 杆长沿运动方向的收缩

经典的牛顿时空观的另一重要根据是刚体上两点间的距离，即杆长，不随刚体的运动状态而改变，也不依赖于参考系的选取. 这也是导出伽利略变换的一个基本依据. 在相对论中，这一结论是否仍然成立呢？

设有一刚性的杆，静止时其长度为 l_0. 设该杆沿其长度方向相对于惯性系 K 以常速度 V 作直线运动，而 $\bar{K}$ 为随杆运动的参考系，即杆相对于参考系 $\bar{K}$ 是静止的. 现考察在惯性系 K 与 $\bar{K}$ 中测得的杆的长度是否具有同一数值.

不妨设杆的方向，即它相对于 K 系运动的方向为 x_1 (记为 x) 轴方向. 假定在 K 系中于同一时刻 t 测得杆的两个端点的时空坐标分别为 (t, x^A) 与 (t, x^B). 这样，在 K 系中杆的长度为

$$l = x^B - x^A \tag{3.12}$$

现在在系 $\bar{K}$ 中进行考察. 设上述测量杆的两个端点所对应的事件在 $\bar{K}$ 中的时空坐标分别为 $(\bar{t}^A, \bar{x}^A)$ 与 $(\bar{t}^B, \bar{x}^B)$. 由同时的相对性，

在 K 系中，这两个事件不一定是同时的，即 $t^A = t^B$ 不一定成立；但杆在 $\overline{K}$ 系中是静止的，应成立

$$l_0 = \overline{x}^B - \overline{x}^A. \tag{3.13}$$

由洛伦兹变换 (2.10) 的第二式得

$$\overline{x}^A = \gamma(-Vt + x^A)$$

及

$$\overline{x}^B = \gamma(-Vt + x^B),$$

从而

$$\overline{x}^B - \overline{x}^A = \gamma(x^B - x^A).$$

注意到 (3.12) 与 (3.13) 式，就有

$$l = \gamma^{-1}l_0. \tag{3.14}$$

这说明，当杆沿其长度方向运动时，其长度缩短为其静止长度的 $\frac{1}{\gamma}$ (<1) 倍．如果杆不是沿其运动方向放置，同样地，杆在运动方向上的长度缩短为静止时的 $\frac{1}{\gamma}$ 倍．特别地，若杆仍沿 x_1 轴方向放置，而其运动方向沿着 x_2 轴或 x_3 轴，由洛伦兹变换 (2.10) 易见，杆的长度没有收缩 (但由粗变细！)．这样，沿运动方向长度的收缩，或通俗地说，运动的尺变短，也是一种基本的时空属性．

3.4. 闵可夫斯基 (H. Minkowski) 四维时空

1907 年，爱因斯坦在苏黎世瑞士联邦工业大学时的老师、著名数学家闵可夫斯基开始作关于相对论的学术报告．他认为"爱因斯坦的深刻理论的数学表达方式是粗糙的"，并发展了一种张量形式的狭义相对论．闵可夫斯基的理论形式，为爱因斯坦后来从狭义相对论发展到广义相对论，创造了有力的工具．这里先简单介绍闵可夫斯基四维时空的基本概念，在下一节再进行比较深入的讨论．

洛伦兹变换是四维实向量空间中的线性变换．在这个实向量空间中，对其元素 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ 及 $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ 按如下法则定义内积：

$$(x, y) = c^2x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, \tag{3.15}$$

就得到闵可夫斯基四维时空, 记为 M

需要指出的是, 由 (3.15) 式定义的闵可夫斯基四维时空 M 中的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 不满足通常内积所具有的正性条件, 即二次型 $\langle x,x\rangle$ 不是正定的.

闵可夫斯基四维时空 M 中的元素 (点) 称为事件. 设 $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_0,y_1,y_2,y_3)\in M$ 为两个事件, 定义它们之间的闵可夫斯基距离为

$$r=\sqrt{\langle y-x,y-x\rangle}=\sqrt{c^2(y_0-x_0)^2-\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2}. \quad (3.16)$$

当然这个距离并不总取实值. 由洛伦兹变换的定义知道: 闵可夫斯基四维时空中任意两个事件的闵可夫斯基距离是洛伦兹变换下的不变量. 此外, 从前面关于两个事件因果性的分析还可看出: 在闵可夫斯基四维时空中, 当且仅当两个事件的闵可夫斯基距离为实值时, 这两个事件之间才有因果关系.

为了方便起见, 在下文中以大写拉丁字母表示事件.

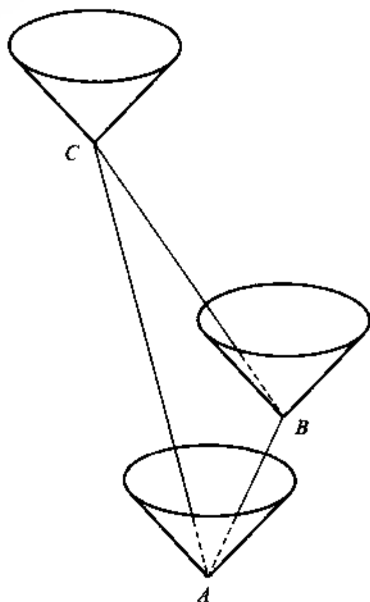


图 5

定理 3.1. 设 A, B 及 C 为闵可夫斯基四维时空 M 中两两之间有因果关系的三个事件 (如图 5 所示), 则成立

$$r_{AC} \geq r_{AB} + r_{BC}, \tag{3.17}$$

其中 r_{AB} 表示事件 A 与 B 之间的闵可夫斯基距离等.

定理 3.1 的证明是常规的, 作为练习留给读者.

这一定理说明: 在闵可夫斯基四维时空中, 会出现三角形两边长度之和不超过第三边的长度. (3.17) 式也称为逆三角形不等式.

下面讨论闵可夫斯基距离的物理意义. 设 M 中有两个事件 A 及 B, 且 B 是 A 的果. 为简单起见, 设 A 与 B 的时空坐标分别为 $(0,0,0,0)$ 与 (t,x_1,x_2,x_3). 这样, A, B 之间的闵可夫斯基距离为

$$r_{AB} = c\tau_{AB}, \tag{3.18}$$

其中

$$\tau_{AB} = t\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i}{ct}\right)^2} \tag{3.19}$$

在所取的参考系下, t 为事件 A 与 B 之间的时间差, $\sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$ 为 A 与 B 之间的空间距离 (这里及下面, 在不至于引起混淆的情况下, 我们用同一字母描述事件及其相应的空间点). 于是, 如果有粒子从时刻 0 开始, 以速度

$$V = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}}{t} \tag{3.20}$$

由点 A 出发沿 AB 方向作匀速直线运动, 那么在时刻 t 该粒子到达 B 点. 此时, (3.19) 式可以写为

$$\tau_{AB} = t\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}. \tag{3.21}$$

由 (3.10) 式并注意到其中 γ 之定义, 可知上式给出的 τ_{AB} 恰是以运动粒子为参考系时, 由点 A 到达点 B 所化费的时间.

定理 3.1 及闵可夫斯基距离的物理意义可用来解释所谓双生子“佯谬”：一对孪生兄弟中，甲留在地球上，乙乘火箭以接近光速的速度飞行到其它星球，然后返回地球．这时，人们发现乙比留在地球上的孪生兄弟甲要年轻许多．

事实上，设 A 表示乙从地球出发这一事件，而乙乘速度为 $V\ (>0)$ 的火箭到达另一星球这一事件则记为 B．然后乙仍乘这一火箭以速度 V 返回地球，这一事件记为 C．在地球上的人（甲）看来，这次星际旅行花费的时间为 τ_{AC}；而在乙看来（即以他自身为参考系），这次旅行花费的时间为 $\tau_{AB}+\tau_{BC}$．由定理 3.1 知

$$\tau_{AC}\geqslant\tau_{AB}+\tau_{BC},$$

且容易验证，此时上式成立严格的不等号．实际上应成立

$$\tau_{AC}=\gamma(\tau_{AB}+\tau_{BC}), \tag{3.22}$$

其中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$（见习题 7）．这就说明了双生子“佯谬”的正确性．

双生子“佯谬”是爱因斯坦于 1905 年在一篇论文中提出来的．对此一直有着激烈的争论．持不同意见的人认为：乙相对于甲运动，根据运动的相对性，那么甲也相对于乙运动，从而不能得出上述的结论．但实际上，乙离开地球进行星际旅行后再返回，这必须作加速运动，所以甲乙之间的地位是不对称的．

直到 1966 年，有人在实验室里用 μ 子进行了双生子旅行实验：使 μ 子从一个直径为 14 米的圆环上的某点出发，沿圆轨道再回到出发点．实验结果表明，旅行的 μ 子确比未经旅行的 μ 子年轻．如果有朝一日，人类能制造出速度接近光速的运载工具，那么“山中方数日，世上已千年”这一幻想就将变为现实了．

3.5. 任何传输速度均不能超过真空中的光速

洛伦兹变换可视为两个惯性系之间的时空坐标转换的关系式．由于时空坐标均为实数，洛伦兹变换的系数也必须为实数，这就要求 $|V|<c$．这说明惯性系之间的相对速度不能超过光速 c．鉴于参考系选取的任意性，就得到任何物体的运动速度以及信号的传播速度等等均不能超

过光速 c. 如 §3.1 中所述，这保证了两个事件之间的因果关系不会颠倒.

任何速度均不能超过光速，是狭义相对论的基本结论之一. 因此，如果找到超光速事件，就是对狭义相对论的否定. 自狭义相对论建立以来，就不断有人力图寻找超光速事件，而且出现过一些正面的报道. 然而，直至目前为止，还没有一个超光速事件为科学界所确认.

§4. 相对论动力学

在 §1 中我们说过，经典力学方程在伽利略变换下保持不变. 那么在洛伦兹变换下情况如何呢？例如，牛顿方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}$$

是否具有洛伦兹不变性呢？我们不必直接考察上述方程在洛伦兹变换下的变化情况，而只需对其作一些直观上的分析，就可得到有关的结论. 事实上，由牛顿方程，物体的加速度正比于外力，于是，在一个恒力的作用下，其运动速度会直线增加，并最终超过光速 c. 这是相对论所不允许的. 这说明牛顿方程不可能具有洛伦兹不变性.

为了建立相对论动力学方程，应要求它们至少满足以下两方面的条件：该方程的形式具有洛伦兹变换下的不变性，且当物体运动速度远小于光速 c 时，该方程应与经典力学方程一致. 后一要求的提出，是因为在低速运动情况下，各种实验与日常经验已经充分证明了经典力学方程的正确性. 这就是说，要在经典力学方程的基础上，将其改造成满足洛伦兹变换下为不变的相对论力学方程. 为此目的，所讨论的物理量应该是闵可夫斯基四维时空 M 中关于洛伦兹变换的标量、向量以及张量.

4.1. 闵可夫斯基四维时空中的张量

与欧氏空间中的笛卡儿张量 (见附录一) 不同，闵可夫斯基四维时空 M 中的张量有逆变、协变以及混合之分，读者可参看附录三. 尽管使用上述张量会在下文讨论相对论流体力学时带来方便，但为了不过多地涉及张量方面的内容，这儿我们只介绍逆变张量.

为讨论方便起见，如同一般的相对论文献中那样，记

$$x^0 = ct, \quad x^i = x_i \quad (i = 1,2,3) \tag{4.1}$$

(对照 §2 中之记号 $x_0 = t$ 及 x_i ($i = 1, 2, 3$), 有 $x^0 = cx_0$). 这样, 对 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^0, y^1, y^2, y^3) \in M$, 其内积定义 (参见 (3.15) 式) 为

$$\langle x, y\rangle = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \tag{4.2}$$

或

$$\langle x, y\rangle = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \tag{4.3}$$

其中

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

而矩阵中未写出的元素均为零 (如下均如此约定), 且采用了爱因斯坦的约定: 字母相同的上、下指标表示求和. 这儿及今后, 约定希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 等的求和为从 0 到 3, 而对拉丁字母 $i, j, \cdots$ 等的求和为从 1 到 3.

设 $x, y \in M$, 且 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 y 是正交的. 若 $x \in M$, 且 $\langle x, x\rangle = \pm 1$, 则称 x 为 M 中的单位向量.

假设 L 是一个从 M 到 M 的线性变换. 如果在该变换下, M 中任意两个元素的内积保持不变, 即成立

$$\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in M, \tag{4.5}$$

则称线性变换 L 为闵可夫斯基时空 M 中的正交变换.

由洛伦兹变换的定义立即可以看出, 闵可夫斯基时空 M 中的正交变换一定是洛伦兹变换. 反之, 亦不难证明: 洛伦兹变换必为 M 中的正交变换 (见习题 3). 因此, M 中的内积在洛伦兹变换下具有不变性.

设线性变换 L 由矩阵 $A = (a^\alpha_\beta)$ 给出:

$$(Lx)^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta \quad (\alpha = 0, \cdots, 3), \tag{4.6}$$

其中 $(Lx)^\alpha$ 表示 Lx 的第 α 个分量. 由正交变换的定义 (4.5), 并利用 (4.3) 式, 容易验证 L 为正交变换的充分必要条件为其相应的矩阵

A 满足

$$A^T\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

(见习题 4)

设 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ 为 M 中的一组标准正交基，即成立

$$(e_\alpha,e_\beta)=g_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta=0,\cdots,3), \tag{4.8}$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 由 (4.4) 式给出．对 M 中的正交变换 L，记

$$\bar{e}_\alpha=Le_\alpha\quad(\alpha=0,\cdots,3). \tag{4.9}$$

显然，$\{\bar{e}_0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ 也是 M 中的一组标准正交基．实际上，正如在欧氏空间中那样，容易证明：对于任意两组标准正交基 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ 与 $\{\bar{e}_0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$，一定存在正交变换 L 使 (4.9) 式成立．

假定在 M 中两组标准正交基 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ 与 $\{\bar{e}_0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ 之间的关系由下式给出：

$$e_\alpha=a_\alpha^\beta\bar{e}_\beta\quad(\alpha=0,\cdots,3) \tag{4.10}$$

(比较附录一中的 (3) 式)．将 M 中的一个元素 x 用上述两组标准正交基表示，分别记为

$$x=x^\alpha e_\alpha \tag{4.11}$$

与

$$x=\bar{x}^\beta\bar{e}_\beta. \tag{4.12}$$

将 (4.10) 式代入 (4.11) 式右端，并与 (4.12) 式相比较，立即得到

$$\bar{x}^\beta=a_\alpha^\beta x^\alpha\quad(\beta=0,\cdots,3) \tag{4.13}$$

(比较附录一中的 (5) 式)．

定义 4.1. 若在闵可夫斯基时空 M 中的标准正交基 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ 下，一个量由四个实数 (x^0,x^1,x^2,x^3) 表示，且在标准正交基的变换 (4.10) 下，这些分量按 (4.13) 式进行转换，就称此量为闵可夫

斯基时空 M 中的 (逆变) 向量，简称四维 (逆变) 向量. 若一个量 P 在 M 的标准正交基下由 16 个分量 $p^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0,1,2,3$) 表示，且在标准正交基的变换 (4.10) 下，这些分量按以下规律

$$\bar{p}^{\alpha\beta} = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta p^{\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3) \tag{4.14}$$

转换为标准正交基 $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 下的 16 个量 $\bar{p}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, \cdots, 3$)，就称 P 为闵可夫斯基时空 M 中的二阶 (逆变) 张量，简称四维二阶 (逆变) 张量.

至于闵可夫斯基时空 M 中的标量 (简称四维标量)，则是不随 M 中标准正交基的转换而改变的量.

4.2. 四维速度与四维能量 动量向量

闵可夫斯基四维时空 M 中的点称为事件. 一个粒子的历史，在 M 中表示为事件的一个连续序列，称为此粒子的世界线. 设一个粒子的世界线上的事件在惯性系 K 与 $\bar{K}$ (分别相应于标准正交基 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 与 $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$) 中的时空坐标分别为 (x^0, x^1, x^2, x^3) 与 $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$，则由 (4.13) 式应有

$$d\bar{x}^\alpha = a_\beta^\alpha dx^\beta \quad (\alpha = 0, \cdots, 3). \tag{4.15}$$

因此，$dx = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ 为 M 中的 (逆变) 向量. 但由于时间 t 的微分 dt 不是四维标量，$\dfrac{dx}{dt}$ 并不是四维 (逆变) 向量，它自然不能作为四维速度.

由 (4.15) 式，并注意到 M 中的内积在洛伦兹变换下的不变性，就有

$$(dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 = (d\bar{x}^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(d\bar{x}^i)^2. \tag{4.16}$$

设粒子相对于参考系 K 与 $\bar{K}$ 的运动速度大小分别为 v 与 $\bar{v}$. 由于 $\sum\limits_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{3}(d\bar{x}^i)^2$ 分别为在 K 与 $\bar{K}$ 中观测到的粒子在时间间隔 dt 与 $d\bar{t}$ 内运动距离的平方，应有

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = v^2, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{t}}\right)^2 = \bar{v}^2.$$

这样，(4.16) 式可改写为

$$(\mathrm{d}x^0)^2-(v\mathrm{d}t)^2=(\mathrm{d}\bar{x}^0)^2-(\bar{v}\mathrm{d}\bar{t})^2$$

注意到 $x^0=ct$ 及 $\bar{x}^0=c\bar{t}$, 上式给出

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{1-\left(\frac{\bar{v}}{c}\right)^2}\mathrm{d}\bar{t} \tag{4.17}$$

记

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\mathrm{d}t \tag{4.18}$$

由 (4.17) 式，$\mathrm{d}\tau$ 为四维标量，称为固有时间间隔.

以 M 中的标量 $\mathrm{d}\tau$ 除四维 (逆变) 向量 $\mathrm{d}x$, 仍得一个四维 (逆变) 向量 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$, 称为四维速度，并记为

$$(u^0,u^1,u^2,u^3)=\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{4.19}$$

注意到 $\mathrm{d}\tau$ 的定义 (4.18) 式，有

$$(u^0,u^1,u^2,u^3)=\gamma(c,v^1,v^2,v^3), \tag{4.20}$$

其中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$, $v=|\boldsymbol{v}|$, 而

$$\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)=\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4.21}$$

为普通意义下的速度. 注意，这里 $\boldsymbol{v}$ 是粒子运动速度，而不是 $\overline{K}$ 参考系相对于 K 参考系的运动速度. 因此，(4.20) 中的 γ 与前述洛伦兹变换中的 γ 在意义上是不相同的.

类似地，可定义

$$\left(\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{4.22}$$

为*四维加速度*.

以 m_0 表示粒子在静止时的质量，称为*静止质量*. 可合理地认为粒子的静止质量 m_0 为一个四维标量，它与四维速度的乘积也是一个四维 (逆变) 向量，称其为*四维动量*，记为 (p^0, p^1, p^2, p^3)，即

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) = m_0(u^0, u^1, u^2, u^3). \tag{4.23}$$

以 $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ 表示四维动量的空间分量. 由 (4.20) 式，有

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{4.24}$$

其中

$$m = \gamma m_0 \tag{4.25}$$

称为粒子的*惯性质量*. 需要注意的是，惯性质量 m 并不是洛伦兹变换下的不变量，即不是一个四维标量.

现考察四维动量的时间分量 p^0. 由 (4.23)、(4.20) 与 (4.25) 式，有

$$p^0 = \frac{1}{c}E, \tag{4.26}$$

其中

$$E = mc^2 \tag{4.27}$$

称为粒子的*总能量*.

这样，四维动量可以写为

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{1}{c}E, \boldsymbol{p}\right). \tag{4.28}$$

它既给出了粒子的动量 $\boldsymbol{p}$，又给出了粒子的总能量 E. 因此，四维动量又称为*四维能量–动量向量*.

对任一个四维 (逆变) 向量，其时间分量的平方和减去空间分量的平方是一个四维标量. 特别地，对四维速度，由 (4.20) 式有

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \tag{4.29}$$

再由四维动量的定义，得

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = \frac{1}{c^2}E_0^2, \tag{4.30}$$

其中

$$E_0 = m_0c^2 \tag{4.31}$$

称为粒子的静止能量. 它是一个 M 中的标量. 注意到 p^0 的表达式 (4.26), (4.30) 式给出

$$E^2 = c^2|\boldsymbol{p}|^2 + E_0^2 \tag{4.32}$$

这说明, 粒子总能量的平方与动量平方 (乘以 c^2 以使其量纲一致) 之差是一个 M 中的标量, 且等于静止能量的平方. $E^2 - c^2|\boldsymbol{p}|^2$ 称为能量–动量不变量; 而 (4.32) 式则称为能量–动量公式.

爱因斯坦的质–能等价关系式 (4.27) 是狭义相对论中最重要的公式之一 (这一结果发表在其 1905 年关于狭义相对论的第二篇论文中). 它说明, 一定的质量就代表一定的能量. 即使一个处于静止状态的物体, 由于有静止质量 m_0, 且由于 c 是一个很大的量, 其静止能量 E_0 的大小也是很惊人的. 例如 1 千克物质的静止能量就大约相当于功率为 100 万千瓦的发电站三年的发电量. 爱因斯坦质–能关系式已为大量实验事实所证明, 并对后来发展的原子弹及原子能工业起了重要的指导作用.

4.3. 动量与能量守恒定律

将粒子的四维动量 (p^0, p^1, p^2, p^3) 对固有时间 τ 取导数, 即得一个四维 (逆变) 向量, 称为四维力, 并记为 (g^0, g^1, g^2, g^3):

$$(g^0, g^1, g^2, g^3) = \left(\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}p^1}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}p^3}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{4.33}$$

四维力也称为闵可夫斯基力.

四维力的空间分量为

$$g^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.34}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}$ $(i = 1, 2, 3)$ 为普通意义下力的分量, 记为 f^i $(i = 1, 2, 3)$; 而普通力向量为

$$\boldsymbol{f} = (f^1, f^2, f^3) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{4.35}$$

需注意，普通力 $\boldsymbol{f}$ 并不是四维力的空间分量.

由 (4.28) 式，四维力的时间分量为

$$g^0 = \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{4.36}$$

将 (4.32) 式两端关于 t 求导，并注意到 $\dfrac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}t} = 0$, 就得到

$$E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = c^2\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.37}$$

再利用 (4.24) 及 (4.27) 式，并注意到 (4.35) 式，得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}. \tag{4.38}$$

这说明，粒子总能量的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 等于作用在粒子上的普通力的功率 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}$. 这是为什么称 $E = mc^2$ 为粒子的总能量的理由. 由 (4.38) 式，四维力的时间分量的表达式 (4.36) 又可以写为

$$g^0 = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}. \tag{4.39}$$

综合 (4.34)、(4.35) 及 (4.39) 诸式，可得四维力的表达式

$$(g^0, g^1, g^2, g^3) = \gamma\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\right). \tag{4.40}$$

(4.35) 式，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}, \tag{4.41}$$

虽然形式上与经典力学中的牛顿第二定律一样，但在这里只不过是把 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ 定义为力而已. 如果像经典力学中那样，要将 (4.41) 式视为粒子运动的方程，则必须独立地给出力 $\boldsymbol{f}$，而且所确定的 $\boldsymbol{f}$ 在洛伦兹变换下的变换关系必须与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ 的变换相同，即 $\gamma\left(\dfrac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\right)$ 必须是一个四维 (逆变) 向量. 对于牛顿力学中常见的力如万有引力等，要把它们扩展为四维形式，并使其满足在洛伦兹变换下的相应变换要求，这种相对论修正是毫无希望的. 事实上，按牛顿的万有引力理论，二物体间

的引力依赖于它们之间的距离，因此，如果移动其中的一个物体，另一个物体的受力情况就会立即发生改变．这意味着，引力效应应以无限大的速度传播，这与相对论中任何速度均不能超过真空中光速 c 的结论相违背．爱因斯坦在 1908 年到 1914 年间一直试图找到一个与狭义相对论相协调的引力理论，但都没有成功． 1915 年他提出了一个革命性的思想，认为引力不像其它种类的力，只不过是空间—时间不平坦这一事实的结果，并以此为基础建立了广义相对论．

所幸的是，带电粒子在电磁场中运动时所受到的洛伦兹力

$$\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{4.42}$$

(见第一章 (3.19) 式)，满足上述要求的变换规律 (参见 §7)．

当四维力 $(g^0,g^1,g^2,g^3)=0$ 时，由 (4.33) 式，四维动量 $(p^0$、p^1、p^2、$p^3)$ 守恒．由 (4.28) 式，四维动量包括动量 $\boldsymbol{p}$ 与总能量 E．因此，当四维动量守恒时，不仅动量守恒，能量也守恒．这样，动量与能量两条守恒定律就归结为一条守恒定律 —— 四维动量守恒．

现在考察由若干粒子组成的粒子系统．

在经典牛顿力学中，系统的动量守恒定律是由牛顿第二定律并借助于牛顿第三定律得到的．但在狭义相对论中，由于两个分开的粒子之间的作用与反作用只能以不超过真空中光速的有限速度传播，牛顿第三定律不再成立，从而不能利用牛顿第三定律来导出动量守恒定律．尽管如此，作为物理学中最普遍的守恒定律的动量守恒及能量守恒定律，已为迄今为止的所有实验与观测所证实，有理由假定这两个普遍的守恒定律在狭义相对论中仍然成立．

粒子系统的*动量守恒定律*可表述如下：*在惯性系中，一个不受外界作用的粒子系统，总动量保持不变．*

在上述定律中，总动量既包含粒子形式的动量，也包括场 (如电磁场) 形式的动量．在只包含粒子形式动量的特殊情况下，动量守恒定律可用以下形式给出：

$$\sum_i \boldsymbol{p}_i=\text{常量}, \tag{4.43}$$

其中 $\boldsymbol{p}_i$ 为第 i 个粒子的动量．

需注意的是，在粒子系统的运动过程中，该系统的粒子总数并不一定保持不变．例如，由 1 与 2 两个粒子组成的系统，碰撞后可能结

合成一个新粒子，称为完全非弹性碰撞. 碰撞后也可能生成两个（或更多个）粒子 3 与 4. 由动量守恒定律，此时有

$$\gamma_1 m_{10} \boldsymbol{v}_1 + \gamma_2 m_{20} \boldsymbol{v}_2 = \gamma_3 m_{30} \boldsymbol{v}_3 + \gamma_4 m_{40} \boldsymbol{v}_4, \tag{4.44}$$

其中 m_{i0} 及 $\boldsymbol{v}_i$ 分别表示第 i 个粒子的静止质量与速度， $\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{|\boldsymbol{v}_i|^2}{c^2}}}$ $(i=1,2,3,4)$. 一般来说

$$m_{10} + m_{20} \neq m_{30} + m_{40}. \tag{4.45}$$

这种情形称非弹性碰撞. 如果碰撞后仍是原先的两个粒子，就称其为完全弹性碰撞，此时 $m_{30} = m_{10}$, $m_{40} = m_{20}$.

实验表明，对于粒子系统，下述能量守恒定律成立： *在惯性系中，一个不受外界作用的系统，总能量守恒*

在这个表述中，总能量既包含粒子形式的总能量，也包括场的能量，即

$$\sum_i m_i c^2 + E_f = \text{常量}, \tag{4.46}$$

其中 m_i 表示第 i 个粒子的惯性质量， E_f 表示场能 在系统自始至终都只有粒子形式的特殊情况，能量守恒定律 (4.46) 就化为

$$\sum_i m_i c^2 = \text{常量}. \tag{4.47}$$

对于 (4.47) 式，应作几点说明. 即使对自始至终都只有粒子形式的系统，在演化过程中，由于可能存在粒子的衰变与结合现象，粒子的总数以及粒子的静止质量并不一定保持不变. (4.47) 式也还包含系统内部粒子动能与粒子内能的相互转化. 这里所说的内能是指粒子内部由 m_0c^2 量度的能量，而不是热力学中所说的由大量粒子无规则热运动产生的内能

§5. 相对论流体力学

考察流体运动时，如果流体的宏观速度接近于光速，就必须考虑相对论效应. 同时，我们还将会看到，即使流体的宏观速度没有达到必

须考虑相对论效应的程度，但如果流体粒子的微观速度很大，相对论效应也不能忽略.

爱因斯坦早在创立相对论时就曾指出 (见 [6]). 可根据场方程建立无摩擦绝热流体的欧拉方程，从而提出了研究相对论流体运动规律的任务. 但真正对相对论流体力学开展研究，起步却较晚、直至 1970 年才举行第一次关于相对论流体力学的国际研讨会. 此后的二十多年中，由于等离子物理与核物理发展的需要，这方面的研究取得了重大进展. 事实上，相对论流体力学方程组可作为高能天体等离子体的一个好的数学模型，在核子物理的重离子反应分析中也得到重要的应用.

本节讨论的对象限于理想流体. 对于具粘性及热传导耗散效应的流体，虽然也已建立了一些能量—动量张量的本构关系，如朗道 (L. D. Landau) 与栗弗席茨 (E. M. Lifshitz) 以及埃卡特 (C. Ekart) 均分别给出一种模型，但至今仍无满意的结果.

如第二章所述，在建立经典流体动力学方程组时，重要的一步是给出质量流向量、动量流张量和能量流向量. 利用它们可方便地建立反映质量守恒、动量守恒及能量守恒的方程组，在外力为零的假设下，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)=0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k+p\delta_{ik})=0 \quad (i=1,2,3), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k)=0 \tag{5.3}$$

(见第二章 (1.10)、(1.14) 及 (1.19) 式). 为了将上述方程组改造成相对论的形式，必须首先确立相应的能量—动量张量.

5.1. 能量 – 动量张量

在建立能量—动量张量之前，先作两点说明. 首先，在相对论力学中，质量不再守恒，而只代表总能量中的一部分. 在相对论流体力学中，应将描述质量守恒与能量守恒的 (5.1) 和 (5.3) 式一并予以考虑. 此外，在第二章中，称张量 $\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ 为动量流张量. 下面为方便计，将压力所产生的冲量也合并其中，即以 $\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+pI$ 作为动量流张量.

我们要求的能量—动量张量 $(T^{\alpha\beta})$ 是一个四维二阶 (逆变) 张量. 如果以第 0 个守恒律方程描述能量守恒定律，那么在这个张量的

分量中，T^{00} 应表示单位体积的能量，而 (T^{01}, T^{02}, T^{03}) 则表征单位时间内流过单位面积的能量，即单位时间内沿法线 $\boldsymbol{n}$ 方向流过面积微元 $\mathrm{d}S$ 的能量为

$$c(T^{01}\cos(\boldsymbol{n},x_1)+T^{02}\cos(\boldsymbol{n},x_2)+T^{03}\cos(\boldsymbol{n},x_3))\mathrm{d}S,$$

其中出现的因子 c 系由于 $x^0=ct$ 之故．一旦有了 $(T^{00}, T^{01}, T^{02}, T^{03})$ 的表达式，散度形式的方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T^{0\alpha}=0 \tag{5.4}$$

就给出了能量守恒定律．相应地，如果以另外三个方程 (第二、三及四个方程) 描述动量守恒定律，那么 $\frac{1}{c}(T^{10}, T^{20}, T^{30})^{\mathrm{T}}$ 应表示单位体积的动量，而 (T^{ij}) $(i,j=1,2,3)$ 则表征单位时间内流过单位面积的动量．

现在来确定流体的能量—动量张量 $(T^{\alpha\beta})$．对于任意一个给定的流体微元，采用随动参考系，使该微元在这个参考系中是静止的．称这种参考系为*固有参考系*，简称*固有系*．将固有系记为 $\overline{K}$，并将张量 $(T^{\alpha\beta})$ 在 $\overline{K}$ 系中的形式记为 $(\overline{T}^{\alpha\beta})$，我们有

$$\overline{T}^{00}=\mu, \tag{5.5}$$

这里 μ 表示固有内能密度，即在相对于流体静止的固有系中测量的内能密度值，而内能除包括流体的热能、化学能等热力学内能外，还应包括质量所相应的相对论能量．此外，显然应有

$$\overline{T}^{01}=\overline{T}^{02}=\overline{T}^{03}=0. \tag{5.6}$$

至于动量，在固有系 $\overline{K}$ 中，显然有

$$(\overline{T}^{10}, \overline{T}^{20}, \overline{T}^{30})^{\mathrm{T}}=0, \tag{5.7}$$

且单位时间内流过流场中任一给定的面积微元 $\mathrm{d}S$ 的动量只有流体压力的冲量，即

$$(\overline{T}^{ij})=\begin{pmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

综合以上诸式，得到在固有系 $\overline{K}$ 中

$$(\overline{T}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

为了能由能量—动量张量在固有系 $\overline{K}$ 中的表达式 (5.9) 得到其在一般惯性参考系 K 中的表达式，我们利用洛伦兹变换. 设在参考系 K 中，流体微元的宏观速度为 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. 由于 $\overline{K}$ 是随动系，它相对于 K 的运动速度就是 $\boldsymbol{v}$. 相应地，参考系 K 相对于 $\overline{K}$ 的运动速度为 $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{v}$. 设在 K 系与 $\overline{K}$ 系中的时空坐标分别为 (x^0, x^1, x^2, x^3) 与 $(\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$，则由定理 2.2，并注意到 (2.22) 式中的 $x_0 = t$，而不是 $x^0 = ct$，易得

$$x^\alpha = a^\alpha_\beta \overline{x}^\beta \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{5.10}$$

其中

$$a^0_0 = \gamma, \quad a^0_i = \gamma \frac{v_i}{c} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5.11}$$

$$a^i_0 = \gamma \frac{v_i}{c}, \quad a^i_j = \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j + \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{5.12}$$

而 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$, $v = |\boldsymbol{v}|$.

根据二阶 (逆变) 张量的定义 (见 (4.14) 式)，由 (5.10) 式可得在 K 系中

$$T^{00} = a^0_\alpha a^0_\beta \overline{T}^{\alpha\beta} = \frac{\mu + p\dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}, \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} T^{0i} &= T^{i0} = a^i_\alpha a^0_\beta \overline{T}^{\alpha\beta} \\ &= \gamma^2 \mu \frac{v_i}{c} + \sum_{j=1}^{3} \gamma p \left(\frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j + \delta_{ij} \right) \frac{v_j}{c} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\mu+p)v_i}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (i=1,2,3), \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= a^i_\alpha a^j_\beta \overline{T}^{\alpha\beta} \\ &= \gamma^2\mu\frac{v_i v_j}{c^2} + \sum_{k=1}^{3} p\left(\frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_k + \delta_{ik}\right)\times \\ &\quad \left(\frac{\gamma-1}{v^2}v_j v_k + \delta_{jk}\right) \\ &= \frac{(\mu+p)v_i v_j}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \end{aligned} \tag{5.15}$$

注意到四维速度 $(u^0,u^1,u^2,u^3)=\gamma(c,v_1,v_2,v_3)$ (见 (4.20) 式), (5.13)—(5.15) 式可统一写为

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}(\mu+p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta=0,\cdots,3) \tag{5.16}$$

其中

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

(5.16) 式就是能量—动量张量在一般惯性参考系 K 中的表达式.

在 (5.16) 式中, μ 是固有内能密度, 当然不随参考系的变化而改变. 此外, p 也是在固有系中测量的, 但可以证明, 压力 p 是洛伦兹变换下的不变量 (见 [10]).

5.2. 守恒律方程组

有了能量—动量张量 $(T^{\alpha\beta})$, 就可立即得到相对论流体力学中描述能量及动量守恒的方程组

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha=0,\cdots,3) \tag{5.18}$$

上式左端是一个二阶 (逆变) 张量的 (协变) 散度, 因而是一个一阶 (逆变) 向量 (见附录三). 因此, 只要 (5.18) 式在一个惯性参考系中成立, 它必在任何一个惯性参考系中成立.

将 (5.13)—(5.15) 式代入守恒律方程组 (5.18), 并注意到 $x^0=ct$ 及 $x^i=x_i$ $(i=1,2,3)$, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2}-\frac{p}{c^2}\right)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2}v_k\right)=0 \tag{5.19}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2}v_i\right)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2}v_iv_k+p\delta_{ik}\right)=0$$
$$(i=1,2,3). \tag{5.20}$$

以 ρ 表示固有质量密度, 即在固有系中单位体积流体的静止质量, e 表示单位静止质量的热力学内能, 则在以上诸式中

$$\mu=\rho c^2+\rho e. \tag{5.21}$$

如同在经典流体力学中那样, 在 ρ、p 及 e 等热力学量中只有两个是独立的, 并由状态方程所联系.

方程组 (5.19)—(5.20) 中的方程只有 4 个, 但却有 5 个未知函数, 在一般情况下, 还需要补充一个守恒律方程.

在相对论流体力学中, 质量不再是守恒量, 但流体的粒子数却是守恒的. 设 n 表示固有粒子密度, 即在随动的固有系中单位体积流体内粒子的个数. 这样, 粒子流 (四维) 向量在固有系中的表示式应为 $(cn,0,0,0)$, 其中第 0 个分量为在该系中单位体积所含粒子数乘以 c (注意到 $x^0=ct$), 后三个分量表征单位时间内流过单位面积的粒子数. 利用 (逆变) 向量的定义 (见 (4.13) 式) 以及 (5.11)—(5.12) 式, 容易得到粒子流向量在一般参考系 K 中的表达式为

$$(nu^0,nu^1,nu^2,nu^3), \tag{5.22}$$

而 (u^0,u^1,u^2,u^3) 为四维速度. 这样, 就可以得到如下的粒子数守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nu^\alpha)=0. \tag{5.23}$$

注意到

$$\rho=nm_0, \tag{5.24}$$

其中 m_0 为单个粒子的平均静止质量，(5.23) 式又可以写为如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho u^\alpha)=0. \tag{5.25}$$

描述粒子数守恒的方程 (5.23) 或 (5.25) 也称为连续性方程.

注意到 $x^0=ct$, $x^i=x_i$ $(i=1,2,3)$ 以及四维速度的表达式 (4.20), 方程 (5.25) 又可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v_k\right)=0. \tag{5.26}$$

方程 (5.19)～(5.20) 与 (5.26), 连同相应的热力学状态方程, 就构成相对论理想流体力学方程组.

下面进一步讨论流体熵的变化情况. 将张量 $(T^{\alpha\beta})$ 的表达式 (5.16) 代入守恒律方程组 (5.18), 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}u^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}((\mu+p)u^\beta)+\frac{1}{c^2}(\mu+p)u^\beta\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\\&\quad-g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta}=0\quad(\alpha=0,\cdots,3)\end{aligned} \tag{5.27}$$

记

$$u_0=u^0,\quad u_i=-u^i\quad(i=1,2,3). \tag{5.28}$$

事实上, 上式左端诸量为一阶逆变张量 (u^0,u^1,u^2,u^3) 的协变分量 (见附录三). 但在此, 不了解协变张量的概念, 并不妨碍对以下内容的理解. 以 u_α 乘方程 (5.27) 两端, 并关于 α 从 0 到 3 求和, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}((\mu+p)u^\beta)-u^\beta\frac{\partial p}{\partial x^\beta}=0. \tag{5.29}$$

在得到上式的过程中, 我们利用了

$$u_\alpha u^\alpha=c^2 \tag{5.30}$$

(这就是 (4.29) 式),

$$u_\alpha\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}=0 \tag{5.31}$$

以及

$$u_\alpha g^{\alpha\beta} = u^\beta. \tag{5.32}$$

以上诸式都是很容易直接验证的.

注意到 $\mu = \rho(c^2 + e)$ (见 (5.21) 式), 而 $\imath = e + \dfrac{p}{\rho}$ 为单位静止质量流体的焓 (见附录二 (35) 式), 即固有比焓. 利用连续性方程 (5.25), (5.29) 式可以化为

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\imath\rho u^\beta) - u^\beta\frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0 \tag{5.33}$$

再一次利用连续性方程 (5.25), 上式又可写为

$$\rho u^\beta\left(\frac{\partial \imath}{\partial x^\beta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\right) = 0. \tag{5.34}$$

在固有系中

$$\mathrm{d}\imath = \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p + \theta\mathrm{d}S \tag{5.35}$$

(见附录二 (38) 式), 其中 θ 表示在固有系中流体的绝对温度, 即固有温度, 而 S 是单位静止质量的熵, 即固有熵. 利用 (5.35) 式, (5.34) 就化为

$$\rho\theta u^\beta\frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0,$$

即

$$u^\beta\frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0. \tag{5.36}$$

这说明, 单位静止质量的熵沿世界线保持不变, 从而单个粒子的熵自然也保持不变.

利用连续性方程 (5.25), 方程 (5.36) 还可以写为如下的守恒律形式:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\rho S u^\beta) = 0. \tag{5.37}$$

以上两个方程表明流体的流动是绝热的, 这与我们考察的对象是理想流体, 在能量—动量张量中未考虑流体的内摩擦与热传导过程是一致的.

转换为变量 t, x_1, x_2, x_3 以及普通意义下的速度 $\boldsymbol{v}$, 方程 (5.36) 与 (5.37) 可分别化为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial S}{\partial x_k}=0 \tag{5.38}$$

与

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)+\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\rho S v_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=0. \tag{5.39}$$

方程 (5.38) 的形式与经典流体力学的情形 (见第一章 (1.25) 式) 完全一样.

这样, 我们总共得到 (5.19)、(5.20)、(5.26) 以及 (5.39) 这 6 个守恒律方程, 其中包含 v_1, v_2, v_3 以及任意两个独立的热力学量共 5 个未知函数. 如同在经典流体力学中那样, 在光滑的流场中, 熵方程 (5.39) 与能量守恒方程 (5.19) 等价, 这些方程中只有 5 个是独立的. 但如果出现激波, 则流体质点在越过激波时能量、动量及粒子数仍守恒, 但熵要增加.

现在我们对上面得到的相对论流体力学方程组 (5.19)、(5.20) 及 (5.26) 进一步进行化约. 由 (5.20) 式, 有

$$\begin{aligned}
& v_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2}\right)+v_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mu+p}{c^2-v^2} v_k\right) \\
& \quad+\frac{\mu+p}{c^2-v^2} \frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\mu+p}{c^2-v^2} \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \\
& \qquad (i=1,2,3).
\end{aligned}$$

利用方程 (5.19), 上式又可写为

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu+p}{c^2-v^2} \frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\mu+p}{c^2-v^2} \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{v_i}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \\
& \qquad (i=1,2,3),
\end{aligned}$$

由此立即得到

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{c^2-v^2}{\mu+p}\left(\frac{1}{c^2} v_i \frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)=0 \\
& \qquad (i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

这就是相对论情况下的欧拉方程.

由 μ 的表达式 (5.21) (但需注意 ρ 是固有质量密度, 而不是所考察的参考系中的质量密度) 可以看出, 当 $c \to \infty$ 时, 方程组 (5.40) 在形式上就化为经典的欧拉方程 (见第二章 (1.15) 式). 从 (5.40) 式也可看出, 即使流体的宏观运动速度 v 不是很大, 但流体粒子的平均微观速度很大, 由于固有热力学内能 e 可能达到很大的数值, 并注意到 (5.21) 式, 相对论效应也一般不能忽略.

5.3. 简化的状态方程

已知在一切热力学量中, 只有两个是独立的. 为使上段所述的相对论流体力学方程组成为封闭的, 必须给出状态方程, 例如

$$e = e(\rho, p) \tag{5.41}$$

等.

假定流体是由一些无内部结构的粒子组成, 在这些粒子之间只有弹性碰撞而无其它相互作用. 这时, 对两种极端的情况, 可近似地给出简单的状态方程.

1° 冷的非相对论性流体

对这种流体, 其粒子的平均微观运动速度大大小于光速. 此时, 可以证明 (见 [7], [10])

$$e \approx \frac{3p}{2\rho}, \tag{5.42}$$

因此可近似认为

$$\mu = \rho c^2 + \frac{3}{2}p \tag{5.43}$$

2° 热的极端相对论性流体

对这种流体, 其粒子的平均微观运动速度接近光速. 此时, 可以证明 (见 [7], [10])

$$e \approx \frac{3p}{\rho}, \tag{5.44}$$

且

$$e \gg c^2, \tag{5.45}$$

因此可近似认为

$$\mu = 3p. \tag{5.46}$$

事实上，(5.44) 式可由斯忒潘–玻尔兹曼 (Stephan-Boltzmann) 热辐射定律得到，(见 [14])，而 (5.45) 式则说明：热辐射的能量密度大大超过流体的相对论总能量密度．这一情况在天体力学中具有重要的意义．

对天体演化的研究表明，在暗弱的恒星爆发，形成超新星的初始阶段，大量抛射出高温物质．这是宇宙辐射的重要来源之一．这时的流体即属于热的极端相对论性流体

(5.42) 与 (5.44) 可以统一地写为如下形式

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{5.47}$$

其中

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{对非相对论性流体,} \\ \frac{4}{3}, & \text{对极端相对论性流体.} \end{cases} \tag{5.48}$$

(5.47) 式与经典流体力学中多方气体的状态方程 (见附录二中的 (65) 式) 在形式上完全一样．但应该指出的是：(5.47) 式只是一种近似，而且在相对论流体力学中，γ 一般不是常数，也不是绝热指数．

对于极端相对论性流体，$\mu = 3p$．此时由描述能量守恒与动量守恒的四个方程 (5.19)–(5.20) 组成的方程组已经封闭，可以独立地进行求解

§6．相对论流体力学方程组的数学结构

6.1．熵方程的另一种形式

像诸多研究相对论流体力学方程组的文献中那样，引入流体的质量–能量密度

$$\varepsilon = \frac{\mu}{c^2}, \tag{6.1}$$

它是以质量的量纲来度量的固有能量密度．设状态方程为

$$p = p(\varepsilon, S), \tag{6.2}$$

可以证明，静态的均匀相对论流体中小扰动传播速度的平方为 $\dfrac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ (见 [7], [10]), 所以有理由假定

$$\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \stackrel{\mathrm{d}}{=} a^2 > 0, \tag{6.3}$$

其中 a 称为局部音速.

利用焓的表达式 $\iota = e + \dfrac{p}{\rho}$ 和 ε 的定义 (6.1), 并注意到 (5.21) 式，有

$$\iota = \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho} - c^2. \tag{6.4}$$

因此

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \iota}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\varepsilon c^2 + p) - \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \\ &= c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x^\beta} + c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x^\beta} + \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x^\beta}.\end{aligned}$$

注意到由 (6.3) 式，有 $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}(p, S) = a^{-2}$. 将上式代入 (5.34) 式，并利用熵方程 (5.36), 就得到

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho} u^\beta \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} = 0, \tag{6.5}$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho c^2} a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\varepsilon c^2 + p}{\rho c^2} a^2 \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0 \tag{6.6}$$

这就是另一种形式的熵方程

6.2. 相对论流体力学方程组的数学结构

取欧拉方程 (5.40)、熵方程 (6.6) 以及连续性方程 (5.26) 这 5 个方程组成一个方程组，并写为如下形式：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{b}{c^2} v_i \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + b \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-ha^2\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial p}{\partial x_k}-ha^2\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}=0, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma^3\rho}{c^2}\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial v_k}{\partial t}+\gamma\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\gamma^3\rho}{c^2}\sum_{k,l=1}^{3}v_kv_l\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\\&\qquad+\rho\gamma\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\gamma\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}=0,\end{aligned} \tag{6.9}$$

其中

$$b=\frac{c^2-v^2}{\varepsilon c^2+p},\quad h=\frac{\varepsilon c^2+p}{\rho c^2},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.10}$$

记

$$U=(v_1,v_2,v_3,p,\rho)^{\mathrm{T}}. \tag{6.11}$$

方程组 (6.7)—(6.9) 可以写为

$$A_0\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}A_k\frac{\partial U}{\partial x_k}=0, \tag{6.12}$$

其中

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0&0&\dfrac{b}{c^2}v_1&0\\0&1&0&\dfrac{b}{c^2}v_2&0\\0&0&1&\dfrac{b}{c^2}v_3&0\\0&0&0&1&ha^2\\\dfrac{\gamma^3\rho v_1}{c^2}&\dfrac{\gamma^3\rho v_2}{c^2}&\dfrac{\gamma^3\rho v_3}{c^2}&0&\gamma\end{pmatrix},$$

$$A_1=\begin{pmatrix}v_1&0&0&b&0\\0&v_1&0&0&0\\0&0&v_1&0&0\\0&0&0&v_1&ha^2v_1\\\rho\gamma+\dfrac{\gamma^3\rho v_1^2}{c^2}&\dfrac{\gamma^3\rho v_1v_2}{c^2}&\dfrac{\gamma^3\rho v_1v_3}{c^2}&0&\gamma v_1\end{pmatrix},$$

$$
A_2 = \begin{pmatrix}
v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & v_2 & 0 & b & 0 \\
0 & 0 & v_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & v_2 & -ha^2 v_2 \\
\dfrac{\gamma^3 \rho v_2 v_1}{c^2} & \rho\gamma + \dfrac{\gamma^3 \rho v_2^2}{c^2} & \dfrac{\gamma^3 \rho v_2 v_3}{c^2} & 0 & \gamma v_2
\end{pmatrix}
$$

及

$$
A_3 = \begin{pmatrix}
v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & v_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & v_3 & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & v_3 & -ha^2 v_3 \\
\dfrac{\gamma^3 \rho v_3 v_1}{c^2} & \dfrac{\gamma^3 \rho v_3 v_2}{c^2} & \rho\gamma + \dfrac{\gamma^3 \rho v_3^2}{c^2} & 0 & \gamma v_3
\end{pmatrix}
$$

通过直接计算，容易得到

$$
\det A_0 = \gamma \left(1 - \frac{a^2 v^2}{c^4} \right) \tag{6.13}
$$

由于 a 为局部音速，必有 $a < c$. 再注意到 $v < c$, 立即得到

$$
\det A_0 > 0 \tag{6.14}
$$

对任意给定的 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\omega}| = 1$, 考察矩阵

$$
A(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{3} \omega_k A_k
$$

的广义特征值与广义特征向量，即考察矩阵

$$
A(\boldsymbol{\omega}) - \lambda A_0 = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda & 0 & 0 & g_1 & 0 \\
0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda & 0 & g_2 & 0 \\
0 & 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda & g_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda & -ha^2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda) \\
\rho\gamma\omega_1 + f v_1 & \rho\gamma\omega_2 + f v_2 & \rho\gamma\omega_3 + f v_3 & 0 & \gamma(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)
\end{pmatrix} \tag{6.15}
$$

在 λ 为何值时其行列式等于零，并寻求相应的齐次线性代数方程组的非平凡解，其中 $f = \frac{\rho\gamma^3(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda)}{c^2}$，$g_i = b(\omega_i - \frac{\lambda}{c^2}v_i)$ $(i = 1,2,3)$.

易知

$$
\begin{aligned}
&\det(A(\boldsymbol{\omega}) - \lambda A_0)\\
= {}&\gamma(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)^5 + ha^2b(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)\\
&\cdot\begin{vmatrix}
\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & 0 & \omega_1 - \frac{\lambda}{c^2}v_1\\
0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & \omega_2 - \frac{\lambda}{c^2}v_2\\
0 & 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & \omega_3 - \frac{\lambda}{c^2}v_3\\
\rho\gamma\omega_1 + fv_1 & \rho\gamma\omega_2 + fv_2 & \rho\gamma\omega_3 + fv_3 & 0
\end{vmatrix}\\
= {}&\gamma(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)^5 + ha^2b\gamma\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)\\
&\cdot\begin{vmatrix}
\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & 0 & \omega_1 - \frac{\lambda}{c^2}v_1\\
0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & \omega_2 - \frac{\lambda}{c^2}v_2\\
0 & 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & \omega_3 - \frac{\lambda}{c^2}v_3\\
\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0
\end{vmatrix}\\
&+\frac{1}{c^2}ha^2b\gamma^3\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)^2\\
&\cdot\begin{vmatrix}
\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & 0 & \omega_1 - \frac{\lambda}{c^2}v_1\\
0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & 0 & \omega_2 - \frac{\lambda}{c^2}v_2\\
0 & 0 & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda & \omega_3 - \frac{\lambda}{c^2}v_3\\
v_1 & v_2 & v_3 & 0
\end{vmatrix}\\
= {}&\gamma(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)^5\\
&-ha^2b\gamma\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} - \lambda)^3\Bigg(\omega_1(\omega_1 - \frac{\lambda}{c^2}v_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\omega_2\left(\omega_2-\frac{\lambda}{c^2}v_2\right)+\omega_3\left(\omega_3-\frac{\lambda}{c^2}v_3\right)\Bigg)\\
&-\frac{1}{c^2}ha^2b\gamma^3\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda)^1\Bigg(v_1\left(\omega_1-\frac{\lambda}{c^2}v_1\right)\\
&+v_2\left(\omega_2-\frac{\lambda}{c^2}v_2\right)+v_3\left(\omega_3-\frac{\lambda}{c^2}v_3\right)\Bigg)\\
=\;&\gamma(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}-\lambda)^3\Bigg(\left(1-\frac{a^2}{c^4}v^2\right)\lambda^2-2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})\lambda\\
&+\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2-a^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

在上式计算的最后一步，利用了 b、h 及 γ 的定义 (6.10) 式.

显然，$A(\boldsymbol{\omega})$ 具有三重广义特征值

$$
\lambda_2=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{6.17}
$$

而另外两个广义特征值则为

$$
\lambda_{1,3}=\frac{\left(1-\dfrac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})}{1-\dfrac{a^2v^2}{c^4}}
\mp\frac{a\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\dfrac{a^2v^2}{c^4}-\dfrac{1}{c^2}\left(1-\dfrac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2}}{1-\dfrac{a^2v^2}{c^4}}.
\tag{6.18}
$$

由 $|\boldsymbol{\omega}|=1$，有 $(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2\leqslant v^2$，从而

$$
0\leqslant\frac{a^2v^2}{c^4}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2\leqslant\frac{v^2}{c^2}<1
$$

因此，由 (6.18) 式给出的 λ_1 及 λ_3 为两个相异的实广义特征值.

此外，还可以验证、对任意给定的 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{v}$，广义特征值 λ_1 与 λ_3 均不等于 $\lambda_2 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}$. 事实上，不妨设 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v} > 0$ 来进行验证. 因为

$$\frac{\left(1-\dfrac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})}{1-\dfrac{a^2v^2}{c^4}} < \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v},$$

所以 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 而要使 $\lambda_3 = \lambda_2$, 必须

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})\\&+a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2v^2}{c^4}-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2}\\=&\left(1-\frac{a^2v^2}{c^4}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

但容易验证，上式将导致

$$(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2 = c^2,$$

这是不可能的.

这样，为了说明 $A(\boldsymbol{\omega})$ 的广义特征向量构成一个完备系，只要证明：相应于三重广义特征值 λ_2, $A(\boldsymbol{\omega})$ 有三个线性无关的广义特征向量. 由 (6.15) 式，

$$A(\boldsymbol{\omega})-\lambda_2A_0=\begin{pmatrix}0&0&0&b(\omega_1-\frac{\lambda}{c^2}v_1)&0\\0&0&0&b(\omega_2-\frac{\lambda}{c^2}v_2)&0\\0&0&0&b(\omega_3-\frac{\lambda}{c^2}v_3)&0\\0&0&0&0&0\\\rho\gamma\omega_1&\rho\gamma\omega_2&\rho\gamma\omega_3&0&0\end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

对于任一给定的 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $|\boldsymbol{\omega}| = 1$, 必存在与其正交的两个线性无关的向量 $\boldsymbol{r} = (r_1,r_2,r_3)$ 及 $\boldsymbol{s} = (s_1,s_2,s_3)$, 即成立

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{s} = 0.$$

由 (6.19) 式立即可以看出

$$(r_1, r_2, r_3, 0, 0)^{\mathrm{T}} \quad 与 \quad (s_1, s_2, s_3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$$

就是 $A(\boldsymbol{\omega})$ 相应于广义特征值 λ_2 的两个线性无关的广义特征向量. 此外，显然

$$(0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

也是 $A(\boldsymbol{\omega})$ 相应于广义特征值 λ_2 的一个广义特征向量，而且它与上述两个广义特征向量线性无关. 这就证明了 $A(\boldsymbol{\omega})$ 的广义特征向量构成一个完备系.

根据第五章定义 5.4, 相对论流体力学方程组 (6.7)—(6.9) 是一个一阶拟线性双曲型方程组.

由于偏微分方程组的类型不因其中方程的等价组合或化约而改变，因此，在上节中对相对论流体力学得到的守恒律方程组也是双曲型的. 例如，代替 p 和 ρ, 也可以取热力学量 ε 和 S 作为未知函数，讨论由欧拉方程 (5.40)、守恒律方程 (5.19) 及熵方程 (5.38) 构成的方程组. 对这个方程组的数学结构，可以得到同样的结果 (见习题 18—19 及本节第三段).

双曲守恒律在相对论流体力学中较之在经典流体力学中有着更为广泛的应用. 这是因为，在相对论力学中，一切运动及作用的速度均不能超过真空中的光速 c. 像经典流体力学中诸如纳维—斯托克斯方程组 (见第二章) 那样所呈现出的具有无限传播速度的抛物型特征，在相对论流体力学中不可能出现，即使所讨论的流体具有粘性和热传导耗散效应也是如此. 由于具有上述耗散效应的相对论流体力学的模型尚不成熟，又限于本书的篇幅，有关的问题不可能在此深入地讨论，有兴趣的读者可参阅 [12].

6.3. 一维相对论流体力学方程组

设流体沿 $x = x_1$ 轴方向流动，且在垂直于 x_1 轴的任一截面上，一切状态量均具有相同的数值. 这时，可记 $v = v_1$, 而 $v_2 = v_3 = 0$, 且一切量均只依赖于 t 及 $x = x_1$, 相对论流体力学方程组就化为一维的形式. 守恒律组 (5.19)—(5.20) 及 (5.26) 的一维形式就是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon c^2 + p}{c^2 - v^2} - \frac{p}{c^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon c^2 + p}{c^2 - v^2} v\right) = 0, \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon c^2+p}{c^2-v^2}v\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon c^2+p}{c^2-v^2}v^2+p\right)=0, \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=0, \tag{6.22}$$

其中 $\varepsilon=\frac{\mu}{c^2}$ (见 (6.1) 式).

下面，着重考察一维相对论流体力学方程组的有关性质．代替方程组 (6.20)～(6.22)，我们等价地考察如下的方程组：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{c^2-v^2}{\varepsilon c^2+p}\left(\frac{a^2}{c^2}v\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{p_S}{c^2}v\frac{\partial S}{\partial t}\right.\\&\qquad\left.+a^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+p_S\frac{\partial S}{\partial x}\right)=0,\end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}&2\frac{(\varepsilon c^2+p)}{(c^2-v^2)^2}v\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{c^4+a^2v^2}{c^2(c^2-v^2)}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{c^2}p_S\frac{\partial S}{\partial t}\\&\qquad+\frac{(\varepsilon c^2+p)(c^2+v^2)}{(c^2-v^2)^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{(c^2+a^2)v}{c^2-v^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0,\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial x}=0, \tag{6.25}$$

其中 $a^2=\frac{\partial p(\varepsilon,S)}{\partial \varepsilon}$ 为局部音速的平方，$p_S=\frac{\partial p(\varepsilon,S)}{\partial S}$．方程 (6.23) 与 (6.25) 分别是欧拉方程 (5.40) 与熵方程 (5.38) 的一维形式；而方程 (6.24) 则是对方程 (6.20) 打开其中的偏导数，并利用 (6.25) 式而得到的．

记

$$U=(v,\varepsilon,S)^{\mathrm{T}}. \tag{6.26}$$

方程组 (6.23)～(6.25) 可以写为

$$A_0\frac{\partial U}{\partial t}+A_1\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{6.27}$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a^2(c^2-v^2)v}{c^2(\varepsilon c^2+p)} & \dfrac{(c^2-v^2)p_S v}{c^2(\varepsilon c^2+p)} \\ 2\dfrac{(\varepsilon c^2+p)v}{(c^2-v^2)^2} & \dfrac{c^4+a^2v^2}{c^2(c^2-v^2)} & -\dfrac{1}{c^2}p_S \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

及

$$A_1 = \begin{pmatrix} v & \dfrac{a^2(c^2-v^2)}{\varepsilon c^2+p} & \dfrac{(c^2-v^2)p_S}{\varepsilon c^2+p} \\ \dfrac{(\varepsilon c^2+p)(c^2+v^2)}{(c^2-v^2)^2} & \dfrac{(c^2+a^2)v}{c^2-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

容易计算得

$$\det A_0 = \frac{c^4-a^2v^2}{c^2(c^2-v^2)} > 0; \tag{6.28}$$

此外,

$$A_1-\lambda A_0 = \begin{pmatrix} v-\lambda & \frac{a^2(c^2-v^2)(1-\frac{v}{c^2}\lambda)}{\varepsilon c^2+p} & \frac{(c^2-v^2)p_S(1-\frac{v}{c^2}\lambda)}{\varepsilon c^2+p} \\ \frac{(\varepsilon c^2+p)(c^2+v^2-2v\lambda)}{(c^2-v^2)^2} & \frac{(c^2+a^2)v-(c^2+\frac{a^2}{c^2}v^2)\lambda}{c^2-v^2} & \frac{p_S\lambda}{c^2} \\ 0 & 0 & v-\lambda \end{pmatrix}. \tag{6.29}$$

且直接计算可得

$$\begin{aligned}\det(A_1-\lambda A_0) = \frac{v-\lambda}{c^2-v^2}\Big(\big(c^2-\frac{a^2v^2}{c^2}\big)\lambda^2 \\ -2(c^2-a^2)v\lambda+c^2(v^2-a^2)\Big).\end{aligned} \tag{6.30}$$

由 (6.30) 式立即可以得到相应的广义特征值为

$$\lambda_1 = \frac{v-a}{1-\dfrac{av}{c^2}}, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = \frac{v+a}{1+\dfrac{av}{c^2}}. \tag{6.31}$$

容易直接验证

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \tag{6.32}$$

从而方程组 (6.23)—(6.25) 是严格双曲型的.

在进一步讨论相应于这些广义特征值的广义特征向量之前，先给出下面的定义

定义 6.1. 对于一阶拟线性严格双曲型偏微分方程组

$$A_0(U)\frac{\partial U}{\partial t} + A_1(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{6.33}$$

其中 $U = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$, $A_0(U)$ 及 $A_1(U)$ 为 $n\times n$ 阵, 且 $\det A_0(U) \neq 0$, 记 $r_k(U)$ 为矩阵 $A_1(U)$ 对 $A_0(U)$ 的相应于广义特征值 $\lambda_k(U)$ 的广义特征向量. 如果在所考察的区域中成立

$$\nabla\lambda_k(U)\cdot r_k(U) \neq 0, \tag{6.34}$$

称方程组 (6.33) 的第 k 个广义特征值 $\lambda_k(U)$ 是真正非线性的. 如果在所考察的区域中成立

$$\nabla\lambda_k(U)\cdot r_k(U) = 0, \tag{6.35}$$

称第 k 个广义特征值 $\lambda_k(U)$ 是线性退化的. 在 (6.34) 与 (6.35) 中 $\lambda_k(U)$ 的梯度均是关于变量 U 取的.

广义特征值为真正非线性或线性退化的概念在一阶拟线性双曲型方程组的研究中起着重要的作用 (参见 [18]).

由 (6.29) 式易知, 相应于 $\lambda_2 = v$ 的广义特征向量可取为

$$\boldsymbol{r}_2 = (0, -p_S, a^2)^{\mathrm{T}}, \tag{6.36}$$

又显然有

$$\nabla\lambda_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}. \tag{6.37}$$

于是

$$\nabla\lambda_2\cdot\boldsymbol{r}_2 = 0, \tag{6.38}$$

即广义特征值 λ_2 是线性退化的

又由 (6.29) 式可以求得，相应于 $\lambda_1 = \dfrac{v-a}{1-\dfrac{av}{c^2}}$ 的广义特征向量可取为

$$\boldsymbol{r}_1 = \left(-a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \varepsilon + \frac{p}{c^2}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \tag{6.39}$$

而

$$\nabla\lambda_1 = \left(-\frac{1-\dfrac{a^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{av}{c^2}\right)^2}, -a_\varepsilon\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{av}{c^2}\right)^2}, -a_S\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{av}{c^2}\right)^2}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{6.40}$$

其中 $a_\varepsilon = \dfrac{\partial a}{\partial \varepsilon}$, $a_S = \dfrac{\partial a}{\partial S}$. 于是

$$\nabla\lambda_1\cdot\boldsymbol{r}_1 = -\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{av}{c^2}\right)^2}\left(a\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)+a_\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{p}{c^2}\right)\right). \tag{6.41}$$

再由 (6.3) 式易知

$$a_\varepsilon = \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 p}{\partial\varepsilon^2}, \tag{6.42}$$

于是就得到

$$\nabla\lambda_1\cdot\boldsymbol{r}_1 = -\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{2ac^2\left(1-\dfrac{av}{c^2}\right)^2}\cdot\left(2a^2(c^2-a^2)+(\varepsilon c^2+p)\frac{\partial^2 p}{\partial\varepsilon^2}\right). \tag{6.43}$$

这样，广义特征值 λ_1 为真正非线性的充分必要条件为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\varepsilon^2}+\frac{2a^2(c^2-a^2)}{\varepsilon c^2+p}\quad \text{定号}. \tag{6.44}$$

类似地，相应于 $\lambda_3 = \dfrac{v+a}{1+\dfrac{av}{c^2}}$ 的广义特征向量可取为

$$\boldsymbol{r}_3 = \left(a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \varepsilon+\frac{p}{c^2}, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

且 (6.44) 也是广义特征值 λ_3 为真正非线性的充分必要条件.

以上结果, 与经典理想流体力学方程组的情况非常相似 (参见习题 16).

这儿指出, 一维相对论流体力学方程组的特征值 λ_1 及 λ_3 为真正非线性的条件 (6.41) 不依赖于 v 而只与状态方程 $p = p(\varepsilon, S)$ 有关. 实际上, 真正非线性作为方程组的结构性条件, 不应随洛伦兹变换而改变, 从而在判定是否真正非线性的条件中不应包含变量 v.

对于具有重要意义的热的极端相对论性流体 (见 §5.3), 状态方程为 $\mu = 3p$ 即

$$p = \frac{c^2}{3}\varepsilon. \tag{6.45}$$

在这种情况下, 不需要熵方程 (6.25). 方程组 (6.23)—(6.24) 已经封闭. 容易证明, 这一由两个方程构成的方程组的两个广义特征值是真正非线性的充要条件仍由 (6.44) 式给出. 但此时

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\varepsilon^2} = 0 \quad 且 \quad a^2 = \frac{c^2}{3}, \tag{6.46}$$

所以该方程组的两个广义特征值都是真正非线性的 (见习题 17).

§7. 相对论磁流体力学方程组

在第三章中介绍的磁流体力学研究的主要对象是等离子体, 而茫茫宇宙中 99% 以上的物质是以等离子体的形式存在的. 对于存在于宇宙空间的等离子体, 无论从宏观运动速度还是从粒子的微观速度来看, 都应该考虑相对论效应. 本节就来考察相对论磁流体力学.

7.1. 麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性

首先考察电荷与电流. 实验证明: 当从一个惯性系变换到另一个惯性系时, 带电粒子的电荷量保持不变, 即带电粒子的电荷量与该粒子的运动状态无关. 因此, 电荷应在洛伦兹变换下不变. 以 ρ_0 表示在固有参考系 (即随动系) 中流体的电荷密度, 它是一个四维标量.

现在在一般惯性系 K 中进行考察. 由于固有系相对于惯性系 K 以流体的宏观速度 $\boldsymbol{v}$ 运动, 由 §3.3 中的讨论知, 在固有系中测得的长度, 在参考系 K 中测量时, 其在 $\boldsymbol{v}$ 方向上的长度要收缩为固有系中测

得长度的 $\frac{1}{\gamma}$ 倍，其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，而 $|v| = |\boldsymbol{v}|$，但在垂直于 $\boldsymbol{v}$ 方向的长度则保持不变．这样，对固有系中的体积微元 $\mathrm{d}V_0$，其在参考系 K 中的体积就是 $\mathrm{d}V = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}V_0$．因此，在参考系 K 中，电荷密度 ρ 应由下式给出：

$$\rho = \gamma\rho_0. \tag{7.1}$$

有了电荷密度，就可以相应地给出在参考系 K 中的电流密度

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}, \tag{7.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是在参考系 K 中观测到的流体的宏观速度．记

$$(j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho c, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3). \tag{7.3}$$

注意到 (7.1) 式及四维速度的定义 (4.20) 式，容易看出

$$(j^0, j^1, j^2, j^3) = \rho_0(u^0, u^1, u^2, u^3). \tag{7.4}$$

这说明由 (7.3) 式给出的 (j^0, j^1, j^2, j^3) 是一个四维 (逆变) 向量，称为*四维电流密度*．描述电荷守恒定律的连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$$

(见第一章 (2.20) 式)，此时就表示为四维电流密度的四维散度等于零：

$$\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{7.5}$$

为了讨论麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性，需要将其改写为闵可夫斯基四维时空 M 中的张量形式．首先应指出的是：电场与磁场不是独立的，而是相互关联的两个向量．当从一个惯性系通过洛伦兹变换转变到另一个惯性系时，在新系中的电场向量不仅仅依赖于原系中的电场向量，还依赖于原系中的磁场向量．对于磁场同样也是如此．事实上，只要注意到下面的简单事实，就不难看出电场与磁场的这种关联性．在一个参考系中，一个静止的电荷只产生静电场，但在另一个

相对于该参考系运动的参考系中，这个电荷变成运动电荷，除产生电场外，还会激发磁场. 因此，电场向量与磁场向量不能分别看作两个独立的四维向量的空间分量，而必须将它们放在一起进行考虑. 由于它们一共有 6 个分量，可将其视为闵可夫斯基四维时空中的反对称二阶张量.

为了给出这个张量，我们从电磁场的标势与矢势 (见第一章 §6.2) 出发. 在洛伦兹规范下，电磁场的标势 φ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 分别满足如下方程：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{7.6}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{7.7}$$

及洛伦兹条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{7.8}$$

(见第一章 (6.18)—(6.20) 式)，其中 ε_0 及 μ_0 分别为真空中的介电常数和磁导率，它们满足 $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. 方程组 (7.6) (两端除以 c) 和 (7.7) 的右端

$$\left(\frac{\rho}{c\varepsilon_0}, \mu_0\boldsymbol{j}\right) = \mu_0(j^0, j^1, j^2, j^3)$$

是一个四维 (逆变) 向量，而其左端为波动算子，在洛伦兹变换下是不变的. 因此，

$$(A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{1}{c}\varphi, \boldsymbol{A}\right) \tag{7.9}$$

是一个四维 (逆变) 向量. 而方程组 (7.6)—(7.7) 以及洛伦兹条件 (7.8) 可分别表述为如下形式：

$$\Box A^\alpha = \mu_0 j^\alpha \quad (\alpha = 0, \cdots, 3) \tag{7.10}$$

及

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} = 0, \tag{7.11}$$

其中 □ 表示波动算子: $\Box = g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$, 而

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

由四维 (逆变) 向量 (A^α), 可定义如下的四维二阶 (逆变) 张量:

$$F^{\alpha\beta} = g^{\beta\delta}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\delta} - g^{\alpha\gamma}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\gamma} \quad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3). \tag{7.12}$$

容易看出

$$\begin{aligned}
&F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0,\\
&F^{01} = -F^{10} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right),\\
&F^{02} = -F^{20} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right),\\
&F^{03} = -F^{30} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_3}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right),\\
&F^{12} = -F^{21} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2},\\
&F^{13} = -F^{31} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3},\\
&F^{23} = -F^{32} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

再注意到电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 可以用电磁场的标势 ϕ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 给出 (见第一章 (6.13) 和 (6.12) 式):

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \tag{7.15}$$

就有

$$
(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.16}
$$

这个张量称为电磁场的 (逆变) 场强张量. 它是一个二阶反对称张量.

记

$$
({}^*F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 & \frac{1}{c}E_2 \\ -B_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 & -\frac{1}{c}E_1 \\ B_3 & -\frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.17}
$$

可以证明, $({}^*F^{\alpha\beta})$ 也是一个二阶 (逆变) 张量 (见习题 20), 称为 $(F^{\alpha\beta})$ 的对偶张量.

有了场强张量 $(F^{\alpha\beta})$ 及其对偶张量 $({}^*F^{\alpha\beta})$, 真空中的麦克斯韦方程组 (见第一章 (3.9)—(3.12) 式)

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{7.18}
$$

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{7.19}
$$

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7.20}
$$

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \right) \tag{7.21}
$$

就可以写为简单的张量形式. 方程组 (7.18) 及 (7.21) 可以合并写为

$$
\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \mu_0 j^\alpha \quad (\alpha = 0, \cdots, 3), \tag{7.22}
$$

而方程组 (7.19) 及 (7.20) 则可合并写为

$$\frac{\partial^* F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\alpha = 0, \cdots, 3) \tag{7.23}$$

在考察介质中的电磁场时，代替 $(F^{\alpha\beta})$，引入如下的场强张量

$$(G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & \frac{1}{c}H_3 & -\frac{1}{c}H_2 \\ -D_2 & \frac{1}{c}H_3 & 0 & \frac{1}{c}H_1 \\ D_3 & \frac{1}{c}H_2 & -\frac{1}{c}H_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为电通密度或电位移向量，而 $\boldsymbol{H}$ 为电磁场强度. 其对偶张量为

$$({}^*G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}H_1 & \frac{1}{c}H_2 & \frac{1}{c}H_3 \\ \frac{1}{c}H_1 & 0 & -D_3 & D_2 \\ \frac{1}{c}H_2 & D_3 & 0 & -D_1 \\ -\frac{1}{c}H_3 & -D_2 & D_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

这样，介质中的麦克斯韦方程组 (见第一章 (7.15)—(7.18) 式)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{7.26}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{7.27}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7.28}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{7.29}$$

就可写为

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c} j^\alpha \quad (\alpha = 0, \cdots, 3) \tag{7.30}$$

及

$$\frac{\partial^* G^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\alpha = 0, \cdots, 3). \tag{7.31}$$

由于已写为闵可夫斯基四维时空中的张量形式，麦克斯韦方程组 (7.22)—(7.23) 以及 (7.30)—(7.31) 在洛伦兹变换下的不变性是不言而喻的.

7.2. 电磁场的能量—动量张量

设 $(\tau^{\alpha\beta})$ 为电磁场的能量—动量张量. 参照 §5 中有关相对论流体能量—动量张量的讨论，并注意到 $x^0 = ct$ 及 $x^i = x_i\ (i = 1,2,3)$，此时，τ^{00} 为电磁能量密度，$(\tau^{01}, \tau^{02}, \tau^{03})$ 为电磁能量密度向量 (除以 c)；而 $(\tau^{10}, \tau^{20}, \tau^{30})^{\mathrm{T}}$ 为电磁动量密度向量 (的 c 倍)，$(\tau^{ij})\ (i,j = 1,2,3)$ 为电磁动量流密度张量.

由第一章 §7 知

电磁能量密度为　$\dfrac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$；

电磁能量流密度向量为　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$；

电磁动量密度向量为　$\dfrac{1}{c^2}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{c^2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$，

电磁动量流密度张量为

$$\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\boldsymbol{I} - \varepsilon \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} - \mu \boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H},$$

其中 ε 及 μ 分别为电磁场介质的介电常数和磁导率. 这样就有

$$\tau^{00} = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2), \tag{7.32}$$

$$\tau^{0i} = \tau^{i0} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_i \quad (i = 1,2,3), \tag{7.33}$$

$$\tau^{ij} = -(\varepsilon E_i \boldsymbol{E}_j + \mu H_i H_j) + \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\delta^{ij} \quad (i,j = 1,2,3), \tag{7.34}$$

其中 δ^{ij} 为克罗内克记号.

以上诸式可以统一地写为如下形式：

$$\tau^{\alpha\beta} = -c g_{\delta\gamma} F^{\alpha\delta} G^{\beta\gamma} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\mu H^2 - \varepsilon E^2), \tag{7.35}$$

这里 $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$. 不难根据 $(F^{\alpha\beta})$ 及 $(G^{\alpha\beta})$ 的表达式 (7.16) 和 (7.24) 直接验证 (7.35) 式的正确性. 此外，还须说明由 (7.35) 给出的 $(\tau^{\alpha\beta})$

确为一个二阶 (逆变) 张量. 这一点可由下述引理保证.

引理 7.1. $\mu H^2-\varepsilon E^2$ 在洛伦兹变换下保持不变, 是闵可夫斯基四维时空中的一个标量.

这个引理的证明, 作为习题留给读者 (习题 21).

7.3. 理想磁流体的能量　动量张量

结合 (5.16) 式与上面的 (7.35) 式, 就得到相对论电磁流体的能量　动量张量为

$$T^{\alpha\beta}=\frac{1}{c^2}(\tilde{\mu}+p)u^\alpha u^\beta-pg^{\alpha\beta}+\tau^{\alpha\beta}. \tag{7.36}$$

这儿注意, 为了不至于造成记号的混乱, 在上式中以 $\tilde{\mu}$ 表示流体的固有能量密度; 而在由 (7.35) 式给出的 $\tau^{\alpha\beta}$ 的表达式中, 以 μ 表示磁导率. 由 (7.36) 式可以在一般情形下得到考虑耗散 (粘性及热传导) 效应的相对论电磁流体力学方程组, 但下面我们只限于讨论理想磁流体的情形.

由第三章的 (2.7) 式知, 经典的传导电流密度为

$$\sigma(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}), \tag{7.37}$$

其中 σ 为电导率, μ 为磁导率, 而 $\boldsymbol{v}$ 为流体的速度. 由 (7.1) 与 (7.2) 式, 在相对论意义下的传导电流密度则应为

$$\boldsymbol{j}=\sigma\gamma(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}). \tag{7.38}$$

且由 (7.3) 式, $\gamma(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})$ 应是一个四维 (逆变) 向量的空间分量, 并将其定义为四维电场向量 (e^α) 的空间分量 (见 (7.41) 式). 类似地, 将 $\gamma(\boldsymbol{H}-\varepsilon\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})$ 定义为四维磁场向量 (h^α) 的空间分量 (见 (7.42) 式).

定义 7.1. 四维 (逆变) 向量

$$e^\alpha=u_\beta F^{\alpha\beta}\quad(\alpha=0,\cdots,3) \tag{7.39}$$

及

$$h^\alpha=u_\beta{}^*G^{\alpha\beta}\quad(\alpha=0,\cdots,3) \tag{7.40}$$

分别称为四维电场向量与四维磁场向量，其中 (u_β) 、 $(F^{\alpha\beta})$ 及 $({}^*G^{\alpha\beta})$ 分别由 (5.28) 式、 (7.16) 式及 (7.25) 式给出.

由 $(F^{\alpha\beta})$ 、 $({}^*G^{\alpha\beta})$ 的表达式以及四维电场向量和磁场向量的定义，并注意到 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，立即可得

$$
\begin{aligned}
e^0 &= \frac{1}{c}(u^1E_1+u^2E_2+u^3E_3),\\
e^1 &= \gamma E_1+u^2B_3-u^3B_2,\\
e^2 &= \gamma E_2+u^3B_1-u^1B_3,\\
e^3 &= \gamma E_3+u^1B_2-u^2B_1
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

及

$$
\begin{aligned}
h^0 &= \frac{1}{c}(u^1H_1+u^2H_2+u^3H_3),\\
h^1 &= \gamma H_1-u^2D_3+u^3D_2,\\
h^2 &= \gamma H_2-u^3D_1+u^1D_3,\\
h^3 &= \gamma H_3-u^1D_2+u^2D_1.
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

由 (7.41) 及 (7.42) 式容易看出，在固有系中

$$
e^0=0,\quad e^i=\boldsymbol{E}_i\quad (i=1,2,3)
\tag{7.43}
$$

及

$$
h^0=0,\quad h^i=H_i\quad (i=1,2,3).
\tag{7.44}
$$

下面讨论磁流体，即电导率 σ 非常大的高温等离子体 (见第三章 §1). 此时，可以近似地取 $\mu=\mu_0$ 为真空中的磁导率. 再进一步假设磁流体是理想的，即无粘性及热传导效应，且 $\sigma\to+\infty$. 因为电流 $\boldsymbol{j}$ 总取有限值，由 (7.38) 式，对理想磁流体成立

$$
\boldsymbol{E}=-\mu_0\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}
\tag{7.45}
$$

再注意到 (7.43) 式，就容易得到在固有系中 $(e^\alpha)=0$. 因为 (e^α) 为一个四维向量，所以在一切惯性系中均成立

$$
(e^\alpha)=0
\tag{7.46}
$$

这样，就可以仅仅用四维磁场向量 (h^α) 来表示电磁场的能量–动量张量 $(\tau^{\alpha\beta})$

在固有系中, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} = 0$, 利用 (7.43) 式以及 $(F^{\alpha\beta})$ 和 $(G^{\alpha\beta})$ 的表达式 (7.16) 和 (7.24), 由 (7.35) 式可以直接验证

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha\beta} &= -c g_{\delta\gamma} F^{\alpha\delta} G^{\beta\gamma} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mu_0 H^2 \\ &= \begin{cases} \mu_0 h^\alpha h^\beta, & \text{当 } \alpha \neq \beta, \\ \mu_0(\frac{1}{2}|h|^2 + (h^\alpha)^2), & \text{当 } \alpha = \beta, \end{cases}\end{aligned} \tag{7.47}$$

其中 $|h|^2 = (h^0)^2 - (h^1)^2 - (h^2)^2 - (h^3)^2$. 注意到在固有系中

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = (c, 0, 0, 0), \tag{7.48}$$

(7.47) 式又可以改写为

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu_0 h^\alpha h^\beta + \mu_0\left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} u^\alpha u^\beta\right)|h|^2. \tag{7.49}$$

由于 (h^0, h^1, h^2, h^3) 是一个四维向量, 因此 $|h|^2$ 是一个四维标量, 从而 (7.49) 式右端就是一个四维 (逆变) 张量. 这个四维张量在固有系中与四维 (逆变) 张量 $(\tau^{\alpha\beta})$ 相同, 所以它在一切惯性参考系中均与 $(\tau^{\alpha\beta})$ 相同, 即 (7.49) 式对一切惯性参考系成立. (7.49) 式就是理想磁流体的电磁能量–动量张量的表达式. 将它代入 (7.36) 式, 就给出理想磁流体的能量–动量张量的表达式.

7.4. 相对论理想磁流体力学方程组

由 (7.36) 和 (7.49) 式, 理想磁流体的能量–动量张量可写为

$$\begin{aligned}T^{\alpha\beta} = &\frac{1}{c^2}(\mu + p + \mu_0|h|^2)u^\alpha u^\beta \\ &-(p + \frac{1}{2}\mu_0|h|^2)g^{\alpha\beta} - \mu_0 h^\alpha h^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3),\end{aligned} \tag{7.50}$$

其中 μ 为流体的 (不包括磁场能量的) 固有内能密度, 而 μ_0 是真空中的磁导率.

由此, 理想磁流体的能量和动量守恒方程组就由下式给出

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\alpha = 0, \cdots, 3), \tag{7.51}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{1}{c^2}(\tilde{\mu}+p-\mu_0|h|^2)u^\alpha u^\beta$$
$$-(p+\frac{1}{2}\mu_0|h|^2)g^{\alpha\beta}-\mu_0 h^\alpha h^\beta\Big)=0$$
$$(\alpha=0,\cdots,3). \tag{7.52}$$

对于理想磁流体, 由于成立 (7.46) 式, 张量 $({}^*F^{\alpha\beta})$ 仅依赖于 (h^α), 麦克斯韦方程组 (7.30)—(7.31) 就化简为 (7.31) 式, 而 (7.30) 式则仅仅用来决定电流 (j^α). 再注意到 (7.43)—(7.44) 式, 由 $({}^*F^{\alpha\beta})$ 的表达式 (7.17) 可见, 在固有系中

$${}^*F^{\alpha\beta}=\begin{cases}\mu_0 h^\beta, & 当\ \alpha=0,\\ -\mu_0 h^\alpha, & 当\ \beta=0,\\ 0, & 当\ \alpha\beta\neq 0\end{cases}$$

但此时 $(u^0,u^1,u^2,u^3)=(c,0,0,0)$, 因此上式又可写为

$${}^*F^{\alpha\beta}=\frac{\mu_0}{c}(u^\alpha h^\beta-u^\beta h^\alpha). \tag{7.53}$$

由于上式右端是一个二阶 (逆变) 张量, 且它在固有系中与张量 $({}^*F^{\alpha\beta})$ 相等, 故 (7.53) 式在一切惯性参考系中均成立.

这样, 对于理想磁流体, 麦克斯韦方程组取如下简单的形式:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\alpha h^\beta-u^\beta h^\alpha)=0\quad(\alpha=0,\cdots,3). \tag{7.54}$$

对相对论磁流体力学, 除了描述动量和能量守恒的方程组 (7.52) 及麦克斯韦方程组 (7.54) 外, 还须补充描述粒子数守恒的连续性方程. 该方程的形式与 §5 中所讨论的无电磁场的情形完全相同, 由下式给出 (见 (5.25) 式)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\tilde{\rho}u^\alpha)=0, \tag{7.55}$$

这儿为了避免与电荷密度混淆, 以 $\tilde{\rho}$ 表示流体的固有质量密度.

这样, 我们就得到了由 9 个方程组成的相对论理想磁流体力学方程组 (7.52)、(7.54) 及 (7.55).

下面对上述方程组作进一步的讨论.

首先说明，连续性方程 (7.55) 在经典解存在的范围内等价于熵守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\tilde{\rho} S u^\alpha)=0 \tag{7.56}$$

或

$$u^\alpha \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}=0, \tag{7.57}$$

其中 S 为固有系中单位质量流体的熵.

事实上，方程组 (7.52) 可以改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}u^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}[(\tilde{\mu}+p-\mu_0|h|^2)u^\beta]+\frac{1}{c^2}(\tilde{\mu}+p-\mu_0|h|^2)u^\beta\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\\&-g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(p-\frac{1}{2}\mu_0|h|^2\right)-\mu_0\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}h^\beta-\mu_0 h^\alpha\frac{\partial h^\beta}{\partial x^\beta}=0\\&\qquad(\alpha=0,1,2,3).\end{aligned} \tag{7.58}$$

由 (h^α) 的定义 (7.40) 和 $({}^*G^{\alpha\beta})$ 的反对称性，易知

$$u_\alpha h^\alpha=0. \tag{7.59}$$

在 (7.58) 式两端乘以 u_α, 然后对 α 从 0 到 3 求和，并注意到由 (4.29) 及 (5.28) 式，有

$$u_\alpha u^\alpha=c^2,\quad u_\alpha\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}=0 \tag{7.60}$$

以及 (7.59) 式，就可将 (7.58) 式化为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\beta}((\tilde{\mu}+p-\mu_0|h|^2)u^\beta)-g^{\alpha\beta}u_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(p-\frac{1}{2}\mu_0|h|^2\right)\\&-\mu_0 u_\alpha\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}h^\beta=0,\end{aligned} \tag{7.61}$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\beta}((\tilde{\mu}+p)u^\beta)-u^\beta\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\\&-\mu_0\left(\frac{1}{2}u^\beta\frac{\partial|h|^2}{\partial x^\beta}+|h|^2\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}+u_\alpha h^\beta\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}\right)=0.\end{aligned} \tag{7.62}$$

在由 (7.61) 式得到 (7.62) 式的过程中，利用了

$$u^\beta = g^{\alpha\beta}u_\alpha. \tag{7.63}$$

麦克斯韦方程组 (7.54) 可以写为

$$u^\alpha\frac{\partial h^\beta}{\partial x^\beta}+h^\beta\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}-u^\beta\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}-h^\alpha\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}=0. \tag{7.64}$$

在上式两端乘以 h_α，然后对 α 从 0 到 3 求和，并注意到

$$h_\alpha u^\alpha=0 \tag{7.65}$$

(此式可由 (7.59) 式立即得出)，就得到

$$\frac{1}{2}u^\beta\frac{\partial|h|^2}{\partial x^\beta}+|h|^2\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}-h_\alpha h^\beta\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}=0, \tag{7.66}$$

其中 $h_0=h^0$, $h_i=-h^i$ $(i=1,2,3)$. 利用等式 (7.65) 易知有

$$h_\alpha\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}=-u^\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta}=-u_\alpha\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{7.67}$$

于是，(7.66) 式又可以写为

$$\frac{1}{2}u^\beta\frac{\partial|h|^2}{\partial x^\beta}+|h|^2\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}+u_\alpha h^\beta\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\beta}=0. \tag{7.68}$$

这样，(7.62) 式就化为

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}((\hat{\mu}+p)u^\beta)-u^\beta\frac{\partial p}{\partial x^\beta}=0. \tag{7.69}$$

上式与 §5 中的 (5.29) 式完全一样．于是，利用 §5 中同样的推理，若连续性方程 (7.55) 成立，则由 (7.69) 式可得熵守恒方程 (7.57) 也成立；反之亦然．

其次，我们指出，在所得到的理想磁流体力学方程组的 9 个方程 (7.52)、(7.54) 及 (7.55) 或 (7.57) 中，尚有不尽如人意之处．事实上，麦克斯韦方程组 (7.54) 中的第 0 个方程 (相应于 $\alpha=0$) 为

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(u^0h^i-u^ih^0)=0, \tag{7.70}$$

其中，按照约定，上、下指标中相同的拉丁字母表示关于该指标从 1 到 3 求和. 方程 (7.70) 中不含有关于 x^0 (即关于 t) 的偏导数，从而不是一个发展型的方程. 此外，由上述方程组得到的解是否满足 (7.59) 式，仍是一个问题. 为了避开由此引起的麻烦，我们先证明以下的结果

引理 7.2. 方程 (7.70) 可化为对初始条件的要求，即若 (7.70) 式在 $x^0=0$ 时成立，则对一切 $x^0\in\mathbb{R}$ 均成立.

证明 麦克斯韦方程组 (7.54) 的后三个方程 (相应于 $\alpha=1,2,3$) 为

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(u^ih^0-u^0h^i)+\frac{\partial}{\partial x^j}(u^ih^j-u^jh^i)=0\quad(i=1,2,3)\qquad(7.71)$$

将上式对 x^i 求偏导数，并对 i 从 1 到 3 求和，就得到

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(u^ih^0-u^0h^i)\right)=0.\qquad(7.72)$$

由此易得引理的结论.

这样，我们就得到由动量与能量守恒方程组 (7.52)、麦克斯韦方程组 (7.54) 中相应于 $\alpha=1,2,3$ 时的三个方程以及连续性方程 (7.55) 或熵守恒方程 (7.57) 共 8 个方程组成的理想磁流体力学方程组. 再注意到 $u^0=c\gamma$ 及由 (7.59) 式有

$$h^0=\frac{1}{c}(v_1h^1+v_2h^2+v_3h^3),\qquad(7.73)$$

上述方程组中独立的未知函数可取为 v_1, v_2, v_3, h^1, h^2, h^3 以及两个热力学状态变量，其总数也是 8 个. 这样，上述 8 个方程构成一个封闭的方程组. 较之第三章 §4 中讨论的非相对论理想磁流体力学方程组，我们有更多的理由断定这个方程组是双曲型的，但严格的数学结论，还有待于进一步讨论.

习 题

1. 证明在洛伦兹变换下波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=0$$

的形式保持不变.

2. 证明逆三角形不等式 (3.17).

3. 证明：在闵可夫斯基四维时空 M 中，洛伦兹变换一定是正交变换.

4. 设 A 为闵可夫斯基四维时空 M 中线性变换 L 的系数矩阵. 证明 L 为正交变换的充要条件为

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

5. 一超音速飞机以速度 $v=3\times10^{-6}c$ 飞行. 问该飞机飞行多长时间，才能使它的时钟比地球上的时钟慢一秒？

6. 设有一固有长度为 l_0 的杆，在惯性系 K 中取向平行于 x 轴，并以速度 v 沿 x 轴正向运动. 又设惯性系 $\overline{K}$ 相对于 K 以速度 V 沿 x 轴正向运动. 求在惯性系 $\overline{K}$ 中测得的杆长 $\bar{l}$.

7. 验证 (3.22) 式.

8. 设一粒子在惯性系 K 的 xy 平面内以速度 v 沿与 x 轴夹角为 θ 的方向运动. 又设惯性系 $\overline{K}$ 相对于 K 以速度 V 沿 x 轴正向运动. 求粒子相对于 $\overline{K}$ 系的速度 $\bar{v}$ 以及其运动方向与 $\bar{x}$ 轴的夹角 $\bar{\theta}$.

9. 若一个粒子的动量是其非相对论动量 m_0v 的两倍，其中 m_0 为粒子的静止质量，问该粒子的速度 v 是多少？

10. 设电子的速度 $v=0.99c$, 静止质量 $m_0=9.1\times10^{-31}$ kg, 计算该电子的动能，并与用经典牛顿力学计算的动能进行比较.

11. 设有一静止质量为 m_0 的静止粒子，受到一个能量为 Q 的光子的碰撞，并将光子吸收. 求新粒子的速度 v、质量 M、静止质量 M_0 和动能 E_k.

12. 利用欧拉方程 (5.40) 证明：在定常流动中，$\dfrac{\mu+p}{\rho\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 沿流线保持不变，即成立

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Bigg(\frac{\mu+p}{\rho\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\Bigg)=0.$$

13 考察带电粒子在电磁场中的运动. 设粒子的静止质量为 m_0, 其电荷 q 不随粒子的运动状态而变. 在经典牛顿力学中, 粒子的运动方程为

$$m_0 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

(其中洛伦兹力的表达式见第一章 (3.19) 式). 证明: 在相对论力学中, 上述方程应由下述方程组代替:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= \left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{p} (= \boldsymbol{v}), \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{p}$ 分别表示粒子的速度与动量

14. 在气体分子运动论中, 以动量 $\boldsymbol{p}$ 代替速度 $\boldsymbol{v}$ 作为变量, 并以 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 表示粒子的分布函数, 建立了伏拉索夫—麦克斯韦方程组 (见第八章 §7). 试导出该方程组的下述相对论形式:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x f + q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_p f = 0, \\ &\rho(t, \boldsymbol{x}) = q \int_{\infty} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \mathrm{d}p, \\ &\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x}) = q \int_{\infty} \boldsymbol{v} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \mathrm{d}p, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, ρ 及 $\boldsymbol{j}$ 满足标准的麦克斯韦方程组 (见第一章 §3).

15. 证明: 习题 14 中伏拉索夫方程 (第一个方程) 的特征线, 恰由习题 13 中的方程组给出.

16 由第二章 (1.90)—(1.92) 给出的经典的一维理想流体力学方程组, 已知其特征值为

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

其中 c 为局部音速: $c^2 = \dfrac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}$ (见第二章 (1.107) 式). 证明: λ_2 为线性退化, 而 λ_1 及 λ_3 为真正非线性的充要条件为 $\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}$ 定号 (在应用上真正有意义的情况为 $\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} > 0$).

17. 设 $p = a^2\varepsilon$, 其中 $\varepsilon = \dfrac{\mu}{c^2}$, 而 a 为小于 c 的正常数. 写出此时由两个方程组成的一维相对论理想流体力学方程组. 计算相应于该方程组的广义特征值与广义特征向量, 并证明其广义特征值为真正非线性的.

18. 取 $(v_1, v_2, v_3, \varepsilon, S)$ 为未知函数, 给出由欧拉方程 (5.40)、守恒律方程 (5.19) 及熵方程 (5.38) 构成的一阶偏微分方程组的矩阵形式.

19. 对习题 18 中给出的一阶偏微分方程组, 计算其相应的广义特征值与广义特征向量, 并讨论其数学结构.

20. 证明: 对由 (7.17) 式给出的张量 $(F^{\alpha\beta})$, 其对偶张量 $({}^*F^{\alpha\beta})$ 也是一个二阶 (逆变) 张量.

21. 证明 $\mu H^2 - \varepsilon E^2$ 为一个四维标量.

22. 利用 $(F^{\alpha\beta})$ 的表达式及二阶 (逆变) 张量的定义, 证明在由 (2.22) 式给出的洛伦兹变换下, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 分别按以下规律变换:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \gamma \boldsymbol{E} - (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} + \gamma(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \gamma \boldsymbol{B} - (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v} - \gamma(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}).$$

23. 利用连续性方程 (7.55) 和麦克斯韦方程组 (7.54), 证明

$$u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{h^\alpha}{\rho}\right) = \frac{h^\beta}{\rho}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{u^\alpha}{\rho}\frac{\partial h^\beta}{\partial x^\beta} \quad (\alpha = 0, \cdots, 3).$$

这是磁场线 "冻结" 原理 (见第三章 (3.13) 式) 在相对论磁流体力学中的相应形式.

参考文献

[1] 谷超豪、李大潜等. 数学物理方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1987

[2] 彼得罗夫斯基 I G. 偏微分方程讲义. 段虞荣译. 北京: 高等教育出版社, 1956

[3] 蔡伯濂. 狭义相对论. 北京: 高等教育出版社, 1991

[4] 杰克逊 J D. 经典电动力学 (下册) 朱培豫译. 北京：人民教育出版社， 1980
[5] 朗道 L D 栗弗席茨 E M 流体力学 (下册). 孔祥言等译. 北京：高等教育出版社， 1990
[6] 爱因斯坦 A 等. 相对论原理 (狭义相对论和广义相对论经典论文集) 赵志田，刘一贯译. 北京：科学出版社， 1980
[7] 温伯格 S. 引力论和宇宙论 —— 广义相对论的原理和应用. 邹振隆等译. 北京：科学出版社， 1980
[8] 霍金 S. 时间简史 —— 从大爆炸到黑洞 许明贤等译 长沙：湖南科学技术出版社， 1995
[9] 彭罗斯 R. 皇帝新脑 — 有关电脑、人脑及物理定律 许明贤等译. 长沙：湖南科学技术出版社， 1995
[10] 是长春. 相对论流体力学. 北京：科学出版社， 1992
[11] Lichnerowicz A. *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics* New York: Benjamin, 1967
[12] Anile A M, Choquet Bruhat Y (Eds.). *Relativistic Fluid Dynamics*, Noto, 1987. Lecture Notes in Mathematics 1385. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1989
[13] Godlewski E, Raviart P A. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* New York: Springer, 1996
[14] Anile A M. *Relativistic Fluids and Magneto Fluids.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics Cambridge: Cambridge University Press, 1989
[15] Smoller J, Temple B. *Global existence of the relativistic Euler equations.* Commun. Math. Phys., 156 (1993), 67~99
[16] 克威利克 R. 爱因斯坦与相对论. 赵文华译. 北京：商务印书馆， 1996
[17] 尤广建. 爱因斯坦是怎样创建相对论的. 长沙：湖南教育出版社， 1993
[18] Li Ta-tsien. *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems.* Paris: Masson/Chichester: J. Wiley, 1994
[19] 朗道 L D, 栗弗席兹 E M 场论. 任朗，袁炳南译. 北京：人民教育出版社， 1961

第十章 量子力学

§1. 量子力学的建立

至 19 世纪末, 经典物理学 (牛顿力学、电动力学、热力学及统计物理) 的理论已发展到相当完善的地步 物理学家中普遍存在着一种乐观情绪, 认为物理学中所有重大的理论问题均已得到解决、剩下的只是一些细枝末节的问题. 英国著名的物理学家开尔文勋爵 (Lord Kelvin) 在 1900 年就曾说过这样的话· 科学这艘船, 在战胜大量的 "水下暗礁" 和 "猛烈风暴" 之后, 终于驶进了宁静的海湾, 所有重要的问题都已得到解决, 剩下的只是更详细地解释一些细节, 以及反复审核局部问题了.

然而, 就在这种充满乐观的气氛中, 潜伏着经典物理学的危机, 孕育着物理学的革命. 在这场革命中诞生了现代物理学的两个基本理论体系: 相对论和量子力学. 关于相对论的产生以及 (狭义) 相对论的基本内容已在上章作了介绍. 本章将介绍量子力学的基本内容, 并着重讨论量子力学的基本方程: 薛定谔 (Schrödinger) 方程和狄拉克 (Dirac) 方程组.

首先, 我们简单地说明, 既然 19 世纪末经典物理学几乎达到完美的程度, 那么是什么原因促使了量子力学的诞生呢? 这是因为随着科学与技术的发展, 当时在科学实验中出现了一些新的物理现象, 而经典物理学在解释这些现象时却遇到了不可克服的困难 这些困难主要出现在黑体辐射、光电效应及原子光谱等问题中. 一些科学家为解释这些现象所作的种种尝试, 促进了量子力学的产生.

1.1. 黑体辐射和普朗克 (M.Plank) 的量子论

冶金高温测量技术及天文学等方面的需要推动了热辐射的研究. 所谓*热辐射*是指物体由于其温度超过绝对零度而发出的电磁辐射. 到 19 世纪末, 人们已经认识到热辐射与光辐射都是电磁波. 任何物体都向周围发出热辐射, 同时也吸收外界的热辐射. 假设一个物体只以热辐

射的方式与周围进行热量交换．当它与周围环境处于热平衡状态时，必然以同样的速率发射及吸收热辐射，否则热平衡就会遭到破坏．一个重要的问题是研究物体在热平衡时热辐射的能量在不同频率范围中的分布问题．由于热辐射产生的电磁波的波谱非常复杂，且与辐射体的物质种类及表面状态有关，作为一种理想状态，物理学家研究能全部吸收入射热辐射的物体，称为黑体．对于黑体，在达到热平衡时，其热辐射的波谱与物质种类及表面状态均无关，而只依赖于温度．这就为热辐射波谱的研究带来很大方便．真正的黑体是不存在的．但在一个空腔上开一个小孔（见图 1），只要小孔的面积与整个腔壁面积相比非常小，这种空腔即可视为黑体，而小孔处就是黑体的表面．事实上，由小孔进入腔内的热辐射再从小孔逸出的可能性极小，最终将几乎完全为腔壁所吸收．

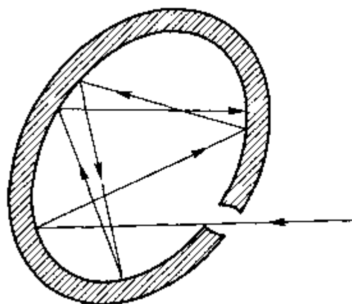


图 1

现考察某个具有确定温度的黑体在达到热平衡时，其热辐射能量密度 E_ν 随频率 ν 的分布情况，这里 $E_\nu \mathrm{d}\nu$ 表示单位体积发射的、频率在 $(\nu, \nu+\mathrm{d}\nu)$ 间的辐射能量．实验得到的辐射能量密度 E_ν 随频率 ν 的变化规律如图 2 中实线所示．但是瑞利 (J. W. Rayleigh) 和金斯 (J. H. Jeans) 在 20 世纪初，根据经典电动力学和统计物理理论所得到的黑体辐射公式为

$$E_\nu = \frac{8\pi}{c^3}kT\nu^2 \tag{1.1}$$

其中 c 为光速，T 为绝对温度，$k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K 为玻尔兹曼常量．(1.1) 式也称为瑞利–金斯公式，其图像由图 2 中的虚线表示．由图 2 可见，在低频部分，由瑞利–金斯公式给出的结果与实验曲线比较符合，但在高频部分，两条曲线的差异却十分明显．此外，按瑞利

金斯公式，当 $\nu \to \infty$ 时，E_ν 单调地趋向于无穷大. 这将导致荒谬的结论：能量将不断地辐射到电磁场中，而且随着频率的增高，辐射的能量愈来愈大，因此所有能量都会被辐射完. 这就是所谓"紫外灾难". 这一结论也有悖于人们的常识. 常识告诉我们，在给定的温度下，热辐射能量密度的最大值总出现在有限的频率上，也就是与人们所见的热辐射物体的颜色相应的频率上，例如灼热的火钳是红色的，太阳是黄白色的等等.

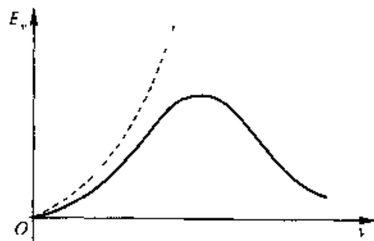


图 2

几乎与上述工作同时，在维恩 (W. Wien) 的半经验公式 (维恩因此获 1911 年度诺贝尔物理学奖) 的基础上，普朗克提出了一个现在以他的名字命名的公式：

$$E_\nu = \frac{c_1\nu^3}{e^{c_2\nu/T} - 1}, \tag{1.2}$$

其中 c_1, c_2 为正常数. 普朗克公式不但形式简单，而且与实验数据符合得很好. 人们认为，这绝非偶然，在这个公式中一定蕴藏着一个非常重要但尚未被揭示的科学原理. 经过两个月的努力，普朗克提出了一个大胆的革命性的"量子"假设：对于一定频率 ν 的辐射，物体只能以最小能量单位 ε 的整数倍吸收或发射. 这就是说，吸收或发射电磁辐射只能以"量子"的形式进行，而"量子"的能量

$$\varepsilon = h\nu, \tag{1.3}$$

其中 $h = 6.6256 \times 10^{-34}$ J·s，称为普朗克常量. 利用这一假设，普朗克出色地从理论上导出了他的黑体辐射公式 (1.2). 电磁能量的辐射只能以分立的、不连续的方式进行，普朗克提出的这一思想，在经典物理中是无法理解的. 他本人也曾设法从经典理论中寻找这种能量量子化

的依据，但无疑均以失败而告终，而他的这一大胆的假设恰成了预示量子理论诞生的曙光．普朗克因为这一贡献而获得 1918 年度的诺贝尔物理学奖．

1.2. 光电效应和爱因斯坦的光量子说

金属表面被光线照射时发出电子的现象称为*光电效应*，发出的电子称为*光电子*．发生这一现象的原因是电磁波将能量传给金属中的电子，使电子逸出金属表面．这一现象是赫兹 (H. Hertz) 在 1887 年发现的．

实验表明，为使光电效应发生，照射光的频率有一个临界值 ν_0．当照射光的频率 $\nu < \nu_0$ 时，无论光的强度多大，都不能使电子逸出金属表面．此外，逸出的光电子的动能与照射光的强度无关，却与照射光的频率 ν 成正比．照射光的强度只影响到光电流的强度，即单位时间内从金属表面单位面积上逸出的光电子数．

这一实验事实，又是经典物理学无法解释的．按经典的电磁理论，电磁波的能量只决定于其强度 (振幅的平方，见第一章 §4)；强度越大，电磁波的能量越大．因此，不论频率如何，只要用足够强的光照射金属，就应有许多电子高速逸出表面，但实验的结果却并非如此．

为了解释光电效应，爱因斯坦于 1905 年提出了*光量子假设*：频率为 ν 的光，由能量为 $h\nu$ 的一群微粒组成．这种微粒称为*光子*或*光量子*，而每个光量子的能量为

$$E = h\nu, \tag{1.4}$$

其中 h 为普朗克常量．当光量子撞击金属表面时，金属中的一个电子可以获得它的全部能量．

利用爱因斯坦的光量子假设，光电效应问题便迎刃而解．设一个电子从金属中逸出需要的能量为 W．那么，只有

$$h\nu > W \tag{1.5}$$

时，才有电子逸出．设逸出电子的速度为 v，就成立

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W, \tag{1.6}$$

其中 m 为电子的质量．当 $\nu < \nu_0 = W/h$ (临界频率) 时，电子无法克服金属表面的束缚从金属中逸出．

光量子理论后来在 1922—1923 年间由关于 X 射线散射的康普顿 (A. H. Compton)—吴有训效应进一步得到证实.

爱因斯坦的光量子理论一方面指出了电磁能量的不连续性 (由分立的光量子组成), 也指出了光本身由粒子组成 (尽管这正是牛顿在两个多世纪前所坚持的, 但决不是牛顿微粒说的简单回归). 但我们知道, 麦克斯韦与赫兹曾指出光是电磁波 (见第一章), 这一说法也已为许多实验所证实. 因此, 光应该既是粒子又是波. 不仅如此, 根据爱因斯坦的光量子假设, 我们还可以建立起光子动量与光波波长之间的关系. 事实上, 光子的运动速度就是光速 c. 由相对论中的爱因斯坦公式 $E = mc^2$ (见第九章 (4.27) 式) 知, 光子的动量 $p = E/c$. 注意到 (1.4) 式, 就得到光子的动量 p 与波长 $\lambda \left(= \frac{c}{\nu}\right)$ 之间成立如下的关系:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.7}$$

这个关系式给出了粒子与波这两个看起来截然不同的概念之间的联系. 而粒子与波这两个概念的统一正是量子力学的基本特征之一.

年轻的爱因斯坦于 1905—1906 年间在德国最有声望的物理杂志《物理学年鉴》一连发表了四篇划时代的论文. 其中第一篇就是关于光电效应的讨论, 其中引进了光量子的概念; 第四篇讨论分子布朗 (Brown) 运动的数学理论; 第二和第三篇我们在第九章中已经提及, 是关于狭义相对论的. 正是这第一篇关于光电效应的论文使他获得了 1921 年度的诺贝尔物理学奖.

1.3. 原子光谱和玻尔 (N. Bohr) 的氢原子模型

光谱分析始于牛顿, 后来不同的元素所特有的谱线便被用来作微量元素的成分分析. 1885 年瑞士物理学家巴耳末 (Balmer) 发现氢原子的可见光光谱的波数 $\frac{1}{\lambda}$ 满足如下规律:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, \cdots, \tag{1.8}$$

其中 λ 是波长, R_H 称里德伯 (Rydberg) 常量, 其值为

$$R_H = 1.096776 \times 10^7/\mathrm{m}. \tag{1.9}$$

适合 (1.8) 式的谱线称为巴耳末系.

巴耳末公式 (1.8) 与观测结果惊人地符合. 但利用经典的牛顿力学和麦克斯韦电磁理论却无法解释上述光谱为什么不是连续分布而却是离散的.

氢原子由质子与电子构成. 按牛顿力学和麦克斯韦电磁场理论, 电子不可能像地球绕太阳旋转那样绕质子永远稳定地旋转. 因为电子围绕质子旋转是加速运动, 而按经典电动力学, 在带电粒子作加速运动时, 要伴随着发射电磁波. 这样, 电子将由于不断辐射而损失能量, 轨道半径会不断缩小, 最终会落到质子上 (见图 3). 这当然不符合氢原子在正常状态下不发出辐射并且是稳定的事实.

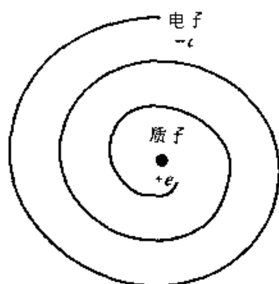


图 3

此外, 按经典的辐射理论, 电子所发射电磁波的频率与电子绕核运动的周期有关. 既然按上述模型, 电子绕质子旋转的频率将越来越高, 而且是连续变化的, 电子所发出的电磁波, 其频谱也应是连续的. 这与前述实验结果也不符合.

为了解释氢原子的稳定性和可见光谱的离散性, 年轻的丹麦物理学家玻尔 (N. Bohr) 于 1913 年巧妙地利用普朗克关系, 提出了如下的氢原子模型.

假设 1 电子只能沿着一组特殊的圆形轨道运动. 沿这一特殊轨道运动的电子处于稳定状态 (定态), 不吸收也不发出光 (电磁波). 在这种稳定的轨道上运动的电子的角动量只能是 $\hbar = h/2\pi$ 的整数倍, 即

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.10}$$

这里 m 、 v 及 r 分别表示电子的质量、运动速度和轨道半径, h 就是前面引进的普朗克常量.

假设 2 只有电子从一个稳定轨道跃迁到另一个稳定轨道时, 才发生光的发射和吸收. 设跃迁前后电子的能量分别为 E_m 和 E_n, 则发

射或吸收光的频率为

$$\nu = \frac{|E_m - E_n|}{h}, \tag{1.11}$$

在 $E_m > E_n$ 时发射光，在 $E_m < E_n$ 时吸收光.

玻尔利用这两条假设成功地解释了氢原子的稳定性和氢原子光谱的离散性，且据此计算出的里德伯常量的值与光谱学中给出的值相当符合. 玻尔根据这两条假设还预言在紫外区还存在另一个线系. 就在作出该预言的第二年 (1914 年)，此线系果然被李曼 (C. V. Lyman) 观测到. 玻尔在这些假设中首先提出的原子能量量子化以及量子跃迁的思想至今仍然是正确的. 玻尔的理论取得了巨大的成功，他为此获得了 1922 年度的诺贝尔物理学奖.

玻尔的理论虽然在许多问题上都很成功，但人们很快就发现了它的局限性. 这个理论不能说明为什么存在原子的这些稳定状态. 同时，玻尔的假设虽然能漂亮地解释氢原子光谱，但在解释复杂原子 (甚至氦原子) 的光谱时就遇到了极大的困难. 此外，玻尔的理论只能处理简单的周期运动，对于非束缚态问题，例如散射问题则无能为力. 尽管如此，玻尔的这一现在被称为 "旧量子论" 的杰出工作对量子力学的建立起了重要的作用.

1.4. 德布罗意 (de Broglie) 的物质波假设

经典物理学对世界的认识可以概括为：宇宙主要有两种客体 —— 微粒和场 (或波). 微粒的运动遵循牛顿定律，而电磁场服从麦克斯韦方程组. 爱因斯坦的光量子理论已说明电磁波具有粒子性. 反过来，粒子是否具有波动性呢？

1924 年，年轻的法国贵族、具有洞察力的物理学家德布罗意 (L. de Broglie) 在他的博士论文中对这一问题给出了肯定的回答. 他认为波与粒子共存决不仅局限于爱因斯坦研究过的光的情况，而应推广到所有粒子. 他指出爱因斯坦关于光量子的公式 (1.4) 和 (1.7) 对任何物质粒子都是成立的，即一个能量为 E 、动量为 p 的物质粒子同时也具有波动性，且其频率 ν 与波长 λ 分别由能量 E 和动量 p 按以下关系决定：

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}. \tag{1.12}$$

德布罗意称由上式确定的波为物质波.

德布罗意利用物质波的概念将经典物理学中关于两种主要客体(物质存在的两种形式)的理论统一了起来. 他还将玻尔理论中的原子定态和驻波相对应, 解释了电子角动量量子化的问题. 设电子运动轨道半径为 r, 其轨道长度就是 $2\pi r$. 电子绕原子核旋转一周后, 要使驻波恰好能够光滑地连接起来, 就要求圆周长是波长 λ 的整数倍, 即成立

$$2\pi r = n\lambda,\quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.13}$$

由此解得 $\lambda = 2\pi r/n$, 再代入 (1.12) 的第 2 式, 就得到 $p = nh/2\pi r$, 即

$$rp = n\hbar,\quad n = 1, 2, \cdots \tag{1.14}$$

这就是玻尔的角动量量子化条件 (1.10).

就在德布罗意提出物质波理论三年以后 (1927 年), 物质粒子的波动性由戴维孙 (C. Davisson) 和革末 (L. Germer) 的电子衍射实验所证实. 这个实验还验证了德布罗意关系式 $\lambda = h/p$ 的正确性.

既然物质粒子都具有波动性, 为什么在通常条件下的宏观物体显示不出波动性呢? 设想质量为 1 克的子弹以速度 100 m/s 射出. 由 (1.12) 的第 2 式可以计算出相应的物质波的波长 $\lambda = 6.6 \times 10^{-33}$ m. 由于波长非常之短, 在通常条件下, 宏观物体不会显示出波动性.

德布罗意关于物质波的理论使他获得了 1929 年度的诺贝尔物理学奖. 他也是迄今为止极少数几个以博士论文获得诺贝尔物理学奖的年轻人之一, 而且是最早的一个.

1.5. 量子力学的建立

量子力学的理论是在 1925—1928 年这段时期里建立起来的.

1925 年, 海森堡 (W. Heisenberg) 发表了题为 "关于运动与力学的关系的量子理论解释" 的论文. 他一方面继承了早期量子论中的合理内核, 如原子能量的量子化等, 同时又摒弃了早期量子论中一些没有实验根据的内容, 如电子轨道的概念等. 他强调任何物理理论只应讨论物理上可观测的量, 并从物理上可观测的量出发, 赋予每一个物理量以一个 (无穷阶的) 矩阵, 创立了现在称之为矩阵力学的量子力学理论, 并因此而获得 1932 年度的诺贝尔物理学奖. 在建立矩阵力学的过程中, 玻尔的思想起了重要的作用.

1926 年, 奥地利物理学家薛定谔 (E. Schrödinger) 进一步推广了德布罗意物质波的概念, 找到了量子体系下物质波满足的运动方程

一一薛定谔方程，建立了后来称为*波动力学*的量子力学理论，并因此而获得 1933 年度的诺贝尔物理学奖. 利用他建立的偏微分方程，薛定谔成功地解决了氢原子光谱等一系列重大问题. 紧接着薛定谔还证明了：虽然矩阵力学与波动力学用以表达的数学手段不同，但二者是等价的 (这种等价性，现在从希尔伯特 (D. Hilbert) 空间线性算子理论的角度来看，应该说是很自然的). 也还是在 1926 年，玻恩 (M. Born) 给出了薛定谔波动力学中波函数的概率解释，他为此获得了 1954 年度的诺贝尔物理学奖.

1927 年，海森堡提出了著名的*测不准原理*，现在也称为*不确定关系*. 至此，就基本完成了目前形式的非相对论量子力学.

1928 年，杰出的英国物理学家狄拉克 (P. A. M. Dirac) 发表了题为 "电子的量子理论" 的论文，把狭义相对论引入量子理论，奠定了相对论量子力学的基础，并因此而获得 1933 年度的诺贝尔物理学奖. 这样，就基本完成了量子力学的理论体系.

作为 20 世纪物理学两个最重要的成就之一的量子力学，对现代物理学以及整个人类文明产生了巨大的影响，现在没有哪一个现代物理学分支以及有关的交叉学科能够离开量子力学这个基础. 量子力学的规律制约着晶体管和集成电路的性态，而这些正是种种电子设备诸如电视、计算机的基本元件；它也是现代化学和生物学的基础. 物理科学中尚未让量子力学进入的唯一领域是引力场和宇宙的大尺度结构. 而将量子理论或其更高级的形式 —— 量子场论和爱因斯坦的广义相对论统一于量子引力中，正是当代英国物理学家霍金 (S. Hawking) 所追寻的目标.

§2. 薛定谔方程与波函数

薛定谔方程是 (非相对论) 量子力学的基本方程，其地位与牛顿方程在经典力学中的地位相当. 在前九章中我们所接触到的一些基本方程 (组)，都是在未知函数的物理意义非常明确的前提下，根据基本的物理假定或定律严格地推导出来的. 但是，在量子力学中薛定谔方程本身只能算是一个基本假定，并不能利用一些更根本的假定来加以证明. 甚至在薛定谔得到这个方程以后，他本人也并不确切地知道这个方程的未知函数 —— *波函数*的含义究竟是什么. 在玻恩给出目前已为绝大多数物理学家所接受的波函数的概率解释后，薛定谔却对此持强烈的

反对态度. 尽管如此, 薛定谔方程以及以它为基础建立起来的量子力学理论的正确性已为迄今为止的大量科学实验和生产实践所证实.

2.1. 薛定谔方程

先讨论只由一个自由粒子所组成的体系.

由德布罗意关系式 (1.12), 与这个粒子的运动相联系的物质波的频率和波长都应是确定的常数. 于是, 有理由假定这个波为由下述波函数描述的平面波:

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{2.1}$$

其中 ω 及 $\boldsymbol{k}$ 分别为圆频率和波向量, 而 A 为一复常数. 这个平面波的频率 $\nu = \omega/2\pi$, 波长 $\lambda = 2\pi/|\boldsymbol{k}|$ (参见第一章 §5.3). 这样, 德布罗意关系式 (1.12) 可写为

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}, \tag{2.2}$$

其中 $\hbar = h/2\pi$, 而第二式实际上是 (1.12) 第二式的三维形式. 从而, 平面波 (2.1) 又可写为

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar}. \tag{2.3}$$

对由 (2.3) 式给出的波函数关于 t 及 $\boldsymbol{x}$ 分别求偏导数, 得

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}\psi, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} = -\frac{p_k^2}{\hbar^2}\psi \quad (k=1,2,3), \tag{2.5}$$

其中 x_k 和 p_k 分别为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的分量. 设粒子的质量为 m, 那么, 在经典的意义下, 粒子的能量 E 与动量 $\boldsymbol{p}$ 之间成立如下关系:

$$E = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m}. \tag{2.6}$$

由 (2.4)—(2.6) 式, 立即得到自由粒子的波函数 ψ 所满足的方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi. \tag{2.7}$$

对自由粒子的一般状态，即自由粒子在任何时刻处于既无确定动量又无确定位置的量子态，设其波函数是一个复值函数

$$\psi = \psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.8}$$

在一定的条件下，这个波函数可以表示为平面波的叠加，即

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - Et)/\hbar} \mathrm{d}p, \tag{2.9}$$

其中 E 与 $\boldsymbol{p}$ 满足 (2.6) 式．由于 (2.9) 式中的被积函数是满足方程 (2.7) 的平面波，故由 (2.8) 式给出的波函数仍应满足方程 (2.7).

值得指出的是：如果在粒子的能量—动量关系式 (2.6) 中作如下替换

$$E \to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to \widehat{p} = -\mathrm{i}\hbar\nabla, \tag{2.10}$$

然后将所得的算子作用于波函数 ψ 上，就得到方程 (2.7).

现在进一步考察在势场 $V(\boldsymbol{x})$ 中运动的粒子．此时在经典的意义下有

$$E = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{x}). \tag{2.11}$$

这就是经典力学中的哈密顿 (Hamilton) 量．在 (2.11) 式右端作由 (2.10) 式给出的替换，就得到算子

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}). \tag{2.12}$$

$\widehat{H}$ 称为哈密顿算子．在 (2.11) 两端作由 (2.10) 式给出的替换，并将所得的算子作用于波函数 ψ，即得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \tag{2.13}$$

其中 $\widehat{H}$ 由 (2.12) 式给出．这个方程称为薛定谔方程．薛定谔方程中的势场 V 也可以依赖于时间 t.

以上讨论的是单个粒子的波函数所满足的方程．对于一个由若干个粒子，例如 N 个粒子，所组成的体系，其波函数具有以下形式：

$$\psi = \psi(t, \boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^N), \tag{2.14}$$

其中 $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k)$ 表示第 k 个粒子的空间坐标 $(k = 1, \cdots, N)$. 设第 k 个粒子受到的外势场为 $U_k(\boldsymbol{x}^k)$, 粒子间的相互作用势为 $V(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^N)$, 则波函数 ψ 满足的薛定谔方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \sum_{k=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \psi + U_k(\boldsymbol{x}^k)\psi \right) \\ & + V(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^N)\psi, \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 m_k 表示第 k 个粒子的质量, Δ_k 表示关于变量 $\boldsymbol{x}^k$ 的拉普拉斯算子, 即

$$\Delta_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1^k} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2^k} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3^k} \right)^2.$$

举例来说, 对有 N 个电子的原子, 考察其电子组成的体系. 对该体系, 原子核 (电荷为 Ne) 所形成的电场的势为外势场, 且

$$U_k(\boldsymbol{x}^k) = -\frac{Ne^2}{|\boldsymbol{x}^k|} \quad (k = 1, \cdots, N) \tag{2.16}$$

这里 e 为电子的电荷, 而坐标原点取在原子核上. 电子间的相互作用势则为

$$V(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^N) = \sum_{k<l}^{N} \frac{e^2}{|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^l|}. \tag{2.17}$$

2.2. 波函数的意义

波函数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ 在物理上究竟表示什么? 物质波到底是一种什么波? 这些带有根本性的问题, 并不是一开始就清楚的. 即使物质波理论及波动力学的创始人德布罗意和薛定谔等人对这些问题的理解也深受经典物理学概念的影响. 薛定谔认为, 波函数本身就代表一个实在的物质分布. 按照这种看法, 物质粒子被视为三维空间中连续分布的物质波包; 波包的大小就是物质粒子的大小, 而波包的群速度就是物质粒子的运动速度.

为了说明这种对波函数的解释是否合理, 首先介绍一下波包的概念. 为简单起见, 以 1 维情况为例进行说明.

所谓*波包*是指其强度只在空间一个不大的区域内明显不为零的波函数所给出的波. 例如由高斯函数

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \tag{2.18}$$

给出的波，其中 $\alpha > 0$ 为常数，其强度主要集中在 $|x| < \dfrac{1}{\alpha}$ 的区域中 (见图 4).

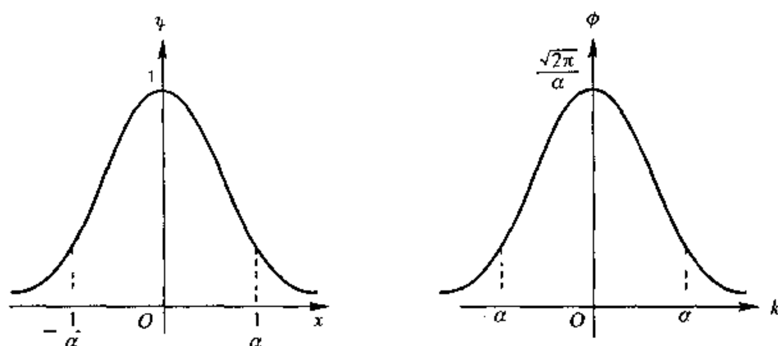


图 4

波包 $\psi(x)$ 可以看成不同波数 k 的平面波的叠加，即

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{2.19}$$

其中 $\phi(k)$ 为 $\psi(x)$ 的傅里叶变换：

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

对高斯波包 (2.18)，其傅里叶变换为

$$\phi(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}}. \tag{2.21}$$

它仍是一个高斯波包，其强度主要集中在 $|k| < \alpha$ 的范围中 (见图 4).

下面考察波包的运动，即其随时间的变化情况. 设 $t = 0$ 时，波包由 (2.19) 式给出. 在 $t > 0$ 时就有

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k. \tag{2.22}$$

这里 $\omega = \omega(k)$ 取得使 $\psi(t, x)$ 为所考察的方程的解，称为色散关系. 如果

$$\omega(k) = c_0 k, \tag{2.23}$$

其中 c_0 为常数，则由 (2.22) 式给出的 $\psi(t,x)$ 是以速度 c_0 传播的行波：$\psi(t,x)=F(x-c_0t)$. 此时波包的中心虽然在移动，但波包的形状保持不变. 如果 (2.23) 式不成立，即

$$\omega'(k)\neq \text{常数}, \tag{2.24}$$

则不同波数 (波长) 的平面波以不同的速度

$$v_p=\frac{\omega(k)}{k} \tag{2.25}$$

传播. v_p 称为*相速度*. 这意味着对由不同频率的简谐波叠加而成的波包，由于不同频率的简谐波有不同的相速度，波包在传播过程中将逐渐分散开来. 这种现象称为*色散*，相应的波称为*色散波*.

$$v_g=\omega'(k) \tag{2.26}$$

称为波包的*群速度*. 对于色散波，群速度 v_g 与各分波的相速度 v_p 不同.

以中心在 k_0 的更一般的高斯波包为例作进一步的讨论. 设

$$\phi(k)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha^2}}, \tag{2.27}$$

则

$$\psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha^2}+\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k \tag{2.28}$$

由于高斯函数 $\phi(k)$ 的强度分布主要集中在 $k=k_0$ 附近，将 $\omega(k)$ 在 $k=k_0$ 附近作泰勒展开

$$\omega(k)\approx\omega_0+v_g(k-k_0)+\frac{\gamma}{2}(k-k_0)^2, \tag{2.29}$$

其中 $\omega_0=\omega(k_0)$, $v_g=\omega'(k_0)$ 为相应于波数 k_0 的群速度，$\gamma=\omega''(k_0)$. 将 (2.29) 式代入 (2.28) 式，得

$$\begin{aligned}\psi(t,x)\approx\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(\mathrm{i}(k-k_0)(x-v_gt)\\&-\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma t+\frac{1}{2\alpha^2}\Big)(k-k_0)^2\Big)\mathrm{d}k.\end{aligned} \tag{2.30}$$

但

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(k-k_0)(x-v_g t)-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma t+\frac{1}{2\alpha^2}\right)(k-k_0)^2\\
&\quad=-z^2-\frac{\alpha^2(x-v_g t)^2}{2(1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t)},
\end{aligned}$$

其中

$$z=\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t}{2\alpha^2}}(k-k_0)-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{2\alpha^2}{1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t}}(x-v_g t)$$

将以上诸式代入 (2.30) 式，并注意到 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\sqrt{\pi}$，就得到

$$\begin{aligned}
\psi(t,x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha^2}{1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t}}\exp\Big(-\frac{\alpha^2(x-v_g t)^2}{2(1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t)}\\
&\qquad +\mathrm{i}(k_0 x-\omega_0 t)\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z\\
&= \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2(x-v_g t)^2}{2(1+\mathrm{i}\gamma\alpha^2 t)}+\mathrm{i}(k_0 x-\omega_0 t)}.
\end{aligned}\tag{2.31}$$

这个波函数的强度分布为

$$|\psi(t,x)|^2=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2\alpha^4 t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2(x-v_g t)^2}{1+\gamma^2\alpha^4 t^2}}.\tag{2.32}$$

它仍是一个关于 x 的高斯函数，是一个中心在

$$x=v_g t\tag{2.33}$$

的波包．由上式可见波包以速度 v_g 运动，这是将 $v_g=\omega'(k)$ 称为群速度的原因．由前面关于高斯波包宽度的讨论知，这个波包的宽度

$$\Delta x\approx\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\sqrt{1+\gamma^2\alpha^4 t^2}.\tag{2.34}$$

$t=0$ 时，$\Delta x\approx\dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha}$．但若 $\gamma\neq 0$，波包的宽度 Δx 将随时间 t 的增加而变宽；且 t 越大，波包宽度的增加越显著．由 (2.34) 式还可以看出，波包的初始宽度 $1/\alpha$ 越小 (即 α 越大)，随后波包的扩散越快．

对于一个自由粒子的波函数 (即薛定谔方程 (2.7) 的解), 容易得到

$$\omega(k)=\frac{\hbar}{2m}k^2 \tag{2.35}$$

及

$$\gamma=\omega''(k)=\frac{\hbar}{m}\neq 0. \tag{2.36}$$

从而物质波包必然要扩散, 或者更形象地说, 随着时间的推移, 粒子 (如电子) 将越来越 "胖" 这与实验结果不符, 波函数的这种诠释是不合理的.

1926 年, 玻恩在利用薛定谔方程处理散射问题时, 为解释散射粒子的角分布, 认为薛定谔方程中的波函数所描述的并不像经典波那样代表什么实在物理量的波动, 而是刻画粒子在空间的概率分布的 概率波. 精确地说, 波的强度

$$|\psi(t,\boldsymbol{x})|^2=\psi(t,\boldsymbol{x})\cdot\overline{\psi}(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.37}$$

其中 $\overline{\psi}(t,\boldsymbol{x})$ 表示 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 的复共轭, 描述粒子在空间的概率分布, 即时刻 t 在 $\boldsymbol{x}$ 附近的微元 $\mathrm{d}x$ 中测到该粒子的概率为 $|\psi(t,\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}x$. 玻恩提出的概率波的概念把微观客体的粒子性与波动性统一了起来. 所谓粒子性是指客体具有一定的质量或电荷等属性, 而与经典的 "粒子有确切的轨道" 这一概念没有什么必然的联系; 而波动性是指波的可叠加性, 并不一定表示什么实在物理量在空间的波动.

对于由 N 个粒子组成的体系, 其波函数 $\psi=\psi(t,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^N)$, 而

$$|\psi(t,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^N)|^2\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^N \tag{2.38}$$

表示粒子 1 出现在 $\boldsymbol{x}^1$ 附近的微元 $\mathrm{d}x^1$, $\cdots$, 粒子 N 出现在 $\boldsymbol{x}^N$ 附近的微元 $\mathrm{d}x^N$ 中的概率.

对于不发生实物粒子产生和湮灭现象的情况, 粒子的数目不随时间而改变, 是守恒的. 对于一个粒子来说, 在全空间找到它的概率应恒等于 1. 于是, 根据玻恩关于波函数的解释, 应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(t,\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}x=0. \tag{2.39}$$

下面我们证明 (2.39) 式. 在薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(\boldsymbol{x})\psi \tag{2.40}$$

两端取复共轭，由于外势场 $V(\boldsymbol{x})$ 总假定为实值函数，就有

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\overline{\psi}+V(\boldsymbol{x})\overline{\psi}. \tag{2.41}$$

将方程 (2.40) 两端乘以 $\overline{\psi}$，方程 (2.41) 两端乘以 ψ，并将二式相减，可得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2)=-\frac{\hbar^2}{2m}(\overline{\psi}\Delta\psi-\psi\Delta\overline{\psi}). \tag{2.42}$$

容易直接验证

$$\overline{\psi}\Delta\psi-\psi\Delta\overline{\psi}=\mathrm{div}(\overline{\psi}\nabla\psi-\psi\nabla\overline{\psi}),$$

于是 (2.42) 式又可写为如下的守恒律形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0, \tag{2.43}$$

其中

$$\rho(t,\boldsymbol{x})=|\psi(t,\boldsymbol{x})|^2, \tag{2.44}$$

$$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi\nabla\overline{\psi}-\overline{\psi}\nabla\psi). \tag{2.45}$$

(2.43) 形式上与流体力学及电动力学中的连续性方程完全一样 (见第二章 (1.10) 式及第一章 (3.5) 式)，故称 $\boldsymbol{j}$ 为概率流密度向量.

在一定的条件下，如设 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时，$\psi(t,\boldsymbol{x})$ 及其对空间变量的偏导数以足够快的速率趋向于零，利用格林公式，由 (2.43) 式立即可得 (2.39) 式.

2.3. 薛定谔方程的数学结构

为简单起见，讨论自由粒子 (即 $V(\boldsymbol{x})=0$) 的情况. 薛定谔方程 (2.7) 可以写为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\mathrm{i}\,a^2\Delta\psi=0, \tag{2.46}$$

其中 $a^2=\hbar/2m$. 下面首先对这个形式上与热传导方程非常相似的方程的类型作一考察.

设

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=u_1(t,\boldsymbol{x})+\mathrm{i}\,u_2(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.47}$$

其中实值函数 u_1 及 u_2 分别为 ψ 的实部与虚部. 将上式代入方程 (2.46), 并分离其实部与虚部, 就得到

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a^2\Delta u_2 = 0, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2\Delta u_1 = 0. \tag{2.49}$$

记 $U = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$, 则上方程组可以写为如下的矩阵形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{3} A_{kl}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l}, \tag{2.50}$$

其中

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$A_{kl} = 0 \quad (k \neq l).$$

对任意给定的 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, 有

$$\sum_{k,l=1}^{3} \xi_k \xi_l A_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

对形如 (2.50) 的偏微分方程组, 如果对于任意给定的 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, (2.51) 式左端矩阵的特征值 λ 恒满足 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, 则称 (2.50) 为在彼得罗夫斯基意义下的抛物型方程组. 但对薛定谔方程组 (2.48)—(2.49), 相应矩阵 (2.51) 的特征值却为 $\lambda = \pm \mathrm{i} a^2$, 从而 $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, 方程组 (2.48)—(2.49) 不是彼得罗夫斯基意义下的抛物型方程组. 但对方程组 (2.48)—(2.49) 而言, 矩阵 $\sum\limits_{k,l=1}^{3} \xi_k \xi_l A_{kl}$ 是非奇异的半正定阵, 有时把这种类型的方程组称为退化抛物型方程组.

为了进一步说明薛定谔方程 (2.46) 不是抛物型的, 我们讨论关于时间的反演问题. 抛物型方程通常描述热传导和扩散等耗散现象. 对这类现象, 随着时间的演化, 系统的熵要增加, 所以过程是不可逆的. 这意味着对于这类方程不能沿着 t 减少的方向求解, 例如, 不能由 $t = 0$ 时的状态, 来决定以前 (t 为负值时) 的状态. 对薛定谔方程, 情况如何呢?

在方程 (2.46) 两端取复共轭，得

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}+\mathrm{i}\,a^2\Delta\bar{\psi}=0. \tag{2.52}$$

再关于时间作反演变换，即令 $t'=-t$, 就有

$$-\frac{\partial\bar{\psi}(-t',\boldsymbol{x})}{\partial t'}+\mathrm{i}\,a^2\Delta\bar{\psi}(-t',\boldsymbol{x})=0.$$

在上式中将 t' 改写为 t, 就得到

$$\frac{\partial\bar{\psi}(-t,\boldsymbol{x})}{\partial t}-\mathrm{i}\,a^2\Delta\bar{\psi}(-t,\boldsymbol{x})=0. \tag{2.53}$$

$\bar{\psi}(-t,\boldsymbol{x})$ 满足的方程 (2.53) 与 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 满足的方程 (2.46) 形式上完全一样. 这说明，若 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 是薛定谔方程 (2.46) 的一个解，那么相应的时间反演态 $\bar{\psi}(-t,\boldsymbol{x})$ 也是薛定谔方程 (2.46) 的解. 也就是说，薛定谔方程在时间 t 的两个方向上的可解性是一样的. 这就是薛定谔方程关于时间反演的不变性. 薛定谔方程的这一特点与波动方程相似. 反映在用半群方法求解时，其定解问题的解算子族形成一个群，而不仅仅是半群 (见 [13]).

下面考察薛定谔方程 (2.46) 的基本解. 为了简单起见，只讨论一维的情况：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\mathrm{i}\,a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0. \tag{2.54}$$

已知热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{2.55}$$

的基本解为

$$E(t,x)=H(t)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, \tag{2.56}$$

其中 $H(t)$ 为赫维赛德函数 (例如见 [6]). 形式地以 $\sqrt{\mathrm{i}}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})a$ 替代 (2.56) 式中的 a, 我们得到

$$E(t,x)=H(t)\frac{1-\mathrm{i}}{2a\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x^2}{4a^2t}} \tag{2.57}$$

可以验证，上式给出的 $E(t,x)$ 就是薛定谔方程 (2.54) 的基本解，即在广义函数的意义下成立

$$\frac{\partial E}{\partial t}-\mathrm{i}a^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\delta(t,x), \tag{2.58}$$

其中 $\delta(t,x)$ 为狄拉克 δ 函数．为了说明这一点，只需验证：对任意给定的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$，成立

$$\int_{\mathbb{R}^2}E(t,x)\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}-\mathrm{i}a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\phi(0,0). \tag{2.59}$$

这个证明留给读者作为练习．

定义 2.1. 设 P 为一个关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 的线性偏微分算子．如果对任一给定的开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 及任意给定的广义函数 $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，从 $Pu\in C^\infty(\Omega)$ 恒可导致 $u\in C^\infty(\Omega)$，就称 P 为次椭圆的．这里 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 是广义函数空间，由 $C_0^\infty(\Omega)$ 上线性连续泛函的全体组成 (例如见 [5])．

对于热传导方程的基本解 (2.56)，容易证明，在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中 $E\in C^\infty$，由此可得热传导算子是次椭圆的 (见 [11])．但对由 (2.57) 式给出的薛定谔方程的基本解 $E(t,x)$，情形却不一样．在 $(0,x^0)$ 的任一邻域内，它都不是 C^∞ 函数，从而薛定谔算子 $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 不是次椭圆的．这是薛定谔方程与热传导方程的另一个重要的区别．

虽然就关于时间的反演不变性这一点而言，薛定谔方程与波动方程相似，但仅从薛定谔方程关于时间变量 t 和空间变量 x 的非对称性 (关于 t 是一阶偏导数，关于 x 是二阶偏导数) 来看，就可以断言，它与波动方程存在着实质性的差异．这种差异还可以进一步从对薛定谔方程柯西问题的讨论中看出．

对于薛定谔方程，可以提如下的柯西问题：在 $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ 中求薛定谔方程 (2.13) 的解，使其在 $t=0$ 时满足初始条件

$$\psi(0,\boldsymbol{x})=\psi_0(\boldsymbol{x}), \tag{2.60}$$

其中 $\psi_0(\boldsymbol{x})$ 为给定的函数．

仍以一维情况的薛定谔方程 (2.54) 为例. 利用基本解 (2.57), 柯西问题 (2.54) 及 (2.60) (相应的一维情况) 的解可由以下公式给出:

$$\psi(t,x)=\frac{1-\mathrm{i}}{2a\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi. \tag{2.61}$$

事实上, 在热传导方程 (2.55) 的柯西问题解的泊松公式中, 形式地以 $\sqrt{\mathrm{i}}a$ 替代 a, 即可得到上式. 至于对初始函数 $\psi_0(x)$ 需提何种要求, 由 (2.61) 式给出的解在什么意义下满足初始条件等问题, 就不在这里深入讨论了.

从 (2.61) 式可以看出, 薛定谔方程的解 $\psi(t,x)$ 在任一点 (t,x) 的值, 均依赖于初始函数 $\psi_0(x)$ 在整个 x 轴上的值. 因此, 初始函数 $\psi_0(x)$ 在任何一点附近的扰动均以无穷大的速度传播. 这一点与热传导方程类似, 而与扰动具有有限传播速度的波动方程却有本质的区别.

虽然薛定谔方程不是双曲型方程, 但由于它描述粒子概率波的演化, 有的作者也将薛定谔方程称为波动方程. 但由它的解所描述的波动, 不是双曲波, 而属于色散波.

最后对薛定谔方程定解问题的提法再作一些说明. 除前面已提及的柯西问题外, 还可以提初–边值问题. 由于薛定谔方程有特定的物理意义, 所以边界条件的提法要根据所考察的具体问题而定. 对于一些常见的边界条件, 如狄利克雷型或诺依曼型的边界条件, 相应的定解问题均是适定的.

2.4. 定态的薛定谔方程

在薛定谔方程 (2.13) 中, 由于势场 $V(\boldsymbol{x})$ 只依赖于空间变量 $\boldsymbol{x}$ 而与 t 无关, 在许多情况下可将其解表示为如下变量分离的形式:

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=f(t)u(\boldsymbol{x}). \tag{2.62}$$

将上式代入方程 (2.13), 得

$$\mathrm{i}\hbar f'(t)u(\boldsymbol{x})=f(t)\widehat{H}u(\boldsymbol{x}),$$

分离变量后就有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{\widehat{H}u(\boldsymbol{x})}{u(\boldsymbol{x})}. \tag{2.63}$$

由于上式两端分别只是 t 及 $\boldsymbol{x}$ 的函数，令其为常数 E，就得到

$$\mathrm{i}\hbar f'(t) = Ef(t) \tag{2.64}$$

及

$$\widehat{H}u(\boldsymbol{x}) = Eu(\boldsymbol{x}). \tag{2.65}$$

不计常数因子，(2.64) 的解为

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar} \tag{2.66}$$

而方程 (2.65) 中不含时间变量 t，称为定态薛定谔方程.

求解定态薛定谔方程实际上就是（在一定边界条件下）求哈密顿算子 $\widehat{H}$ 的特征值和特征函数的问题. 因为 $\widehat{H}$ 是体系的能量算子，所以其特征值也称为体系的能量特征值，相应的特征函数称为能量特征函数. 能量特征函数所描述的粒子的状态称为能量特征态.

设 $\psi_E(\boldsymbol{x})$ 为 $\widehat{H}$ 的相应于能量特征值 E 的能量特征函数，则以 $\psi_E(\boldsymbol{x})$ 为初始函数的薛定谔方程 (2.13) 的解就是

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = \psi_E(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}. \tag{2.67}$$

波函数 (2.67) 描述的是具有一定能量的状态，称为定态. 由于

$$|\psi(t, \boldsymbol{x})|^2 = |\psi_E(\boldsymbol{x})|^2, \tag{2.68}$$

因此处于定态的粒子在空间的概率密度 $|\psi(t, \boldsymbol{x})|^2$ 不随时间而改变.

将 (2.65) 式与 (2.5) 式比较，并注意算子 $\widehat{H}$ 的定义（见 (2.12) 式）及 (2.6) 式，可以看出，对自由粒子 ($V = 0$) 的情况，能量特征值 E 就是粒子的能量. 在一般的情况下也是如此.

例 2.1. 金属中自由电子的运动

讨论金属中自由电子的运动是固体物理的一个基本问题. 但实际金属的微观结构一般都比较复杂，要严格按量子力学的原理来推算其中电子的运动，无论在物理上还是在数学上都很困难. 为了便于讨论，必须首先对金属的模型作一简化.

这儿只讨论一维的情况. 金属是晶体，其中的原子是规则地排列着的，在空间结构上具有周期性. 在这种周期性的结构中，电子除了在互相碰撞的一瞬间或者非常接近金属表面时外，所受的作用力是周期

性的，从而相应的势场也是周期的．因此，讨论电子在周期势场中的运动具有重要的意义．但为简单起见，我们这里采用一个更加简化的模型：既不计电子相互间的碰撞，也略去势能的周期性变化，假定电子在金属内部完全是自由的（势能为常数，电子不受力的作用），只有在达到边界时才受到突然升高的非常大的势能"墙壁"的阻拦．

设金属位于区间 $0 < x < L$，并不妨设势能在此区间内为零．这样，电子的波函数满足的薛定谔方程及相应的边界条件为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \tag{2.69}$$

$$\psi(t,0) = \psi(t,L) = 0 \tag{2.70}$$

这儿，边界条件具有 (2.70) 的形式，是因为电子在 $x = 0$ 及 $x = L$ 处受到非常大的势墙的阻拦，不能逸出金属体外，从而在金属端面出现电子的概率为零．当然，这样做只是一种近似，因为从量子力学的角度看，不管势墙多高，电子逸出体外的概率都是存在的（例如，参见例 2.2）．

先求问题 (2.69)—(2.70) 的定态解

$$\psi(t,x) = e^{-iEt/\hbar}u(x), \tag{2.71}$$

其中 u 满足下述定态薛定谔方程和相应的边界条件：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} = Eu, \quad 0 < x < L, \tag{2.72}$$

$$u(0) = u(L) = 0. \tag{2.73}$$

这正是数理方程中熟知的特征值问题（例如见 [6]）．其特征值为

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.74}$$

而相应的特征函数为

$$u_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.75}$$

其中 a_n 为任意给定的非零常数．对应于特征函数 (2.75)，可得问题的定态解

$$\psi_n(t,x) = a_n e^{-iE_n t/\hbar}\sin\frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.76}$$

这儿 E_n 代表电子的总能量

由以上讨论就得出一个重要的结论：对金属中运动的自由电子而言，其能量不像在经典理论中那样具有连续值，而是离散、即量子化的，形成一个个不同的"能级" $n=1$ 时的状态称为基态，对应于能量的最低值 $E_1=\pi^2\hbar^2/2mL^2$.

由定态波函数的适当的线性叠加就可给出描述电子运动的一般状态、即量子态的波函数：

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-iE_nt/\hbar}\sin\frac{n\pi}{L}. \tag{2.77}$$

例 2.2. 一维散射问题

给定如下的方势垒

$$V(x)=\begin{cases}V_0, & 0<x<a,\\ 0, & x<0\ \text{或}\ x>a,\end{cases} \tag{2.78}$$

其中 $V_0>0$ 为常数，并设具有确定能量 E 的一束粒子沿 x 轴上向由左侧射向该势垒 (见图 5).

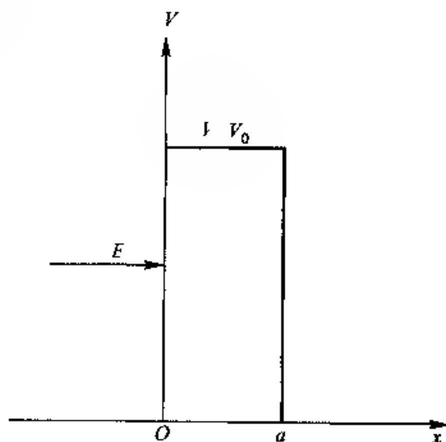


图 5

按照经典力学的观点，若 $E>V_0$，粒子将穿过势垒；而若 $E<V_0$，则粒子不能进入势垒，将被反射回去. 但从量子力学的观点来看，由于粒子具有波动性，无论是哪种情况，都会有部分概率波穿过势垒，而部分概率波被反射回来.

由于势垒 $V(x)$ 与 t 无关，可以讨论相应的定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+V(x)u=Eu. \tag{2.79}$$

在势垒外 (即 $x<0$ 或 $x>a$ 处), $V=0$, 方程 (2.79) 化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}u=0,\quad x<0 \text{ 或 } x>a. \tag{2.80}$$

这是一个二阶常系数线性常微分方程，有两个线性无关的解：

$$u=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \text{ 及 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{2.81}$$

其中

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{2.82}$$

注意到此时波函数为

$$\psi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}u=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+Et/\hbar)} \text{ 及 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-Et/\hbar)},$$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 表示向左传播的波，而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 表示向右传播的波. 对所考虑的问题，在 $x<0$ 的区域中，应该既有向右传播的入射波，又有向左传播的反射波；而在 $x>a$ 的区域中，应只有向右传播的透射波. 这样，就应有

$$u(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, & x<0,\\ S\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, & x>a,\end{cases} \tag{2.83}$$

这里为方便计，将入射波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的系数 (波幅) 取为 1, 而 R 及 S 为待定常数.

在势垒内部 (即 $0<x<a$ 处), 方程 (2.79) 化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}u=0,\quad 0<x<a. \tag{2.84}$$

它仍是一个二阶常系数线性常微分方程. 为求解这个方程，分下面两种情况进行讨论.

1° $E<V_0$ 的情况.

在这种情况下，方程 (2.84) 的通解为

$$u = C_1 e^{-k'x} + C_2 e^{k'x}, \quad 0 < x < a, \tag{2.85}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数，而

$$k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \tag{2.86}$$

由 (2.83) 及 (2.85) 式给出的波函数 $u = u(x)$ 及其一阶导数在 $x = 0$ 处的连续性 (由于 (2.79) 式中系数 $V(x)$ 具有间断，不能期望得到具有更高正则性的解) 给出

$$1 + R = C_1 + C_2$$

及

$$\mathrm{i}k(1 - R) = k'(C_2 - C_1).$$

从而可解得

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right) + R\left(1 + \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)\right], \tag{2.87}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right) + R\left(1 - \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)\right]. \tag{2.88}$$

再由 (2.83) 及 (2.85) 式给出的波函数 $u = u(x)$ 及其一阶导数在 $x = a$ 处的连续性给出

$$S e^{\mathrm{i}ka} = C_1 e^{-k'a} + C_2 e^{k'a}$$

及

$$\mathrm{i}kS e^{\mathrm{i}ka} = -C_1 k' e^{-k'a} + C_2 k' e^{k'a}$$

从而可解得

$$C_1 = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right) e^{\mathrm{i}(k+k')a}, \tag{2.89}$$

$$C_2 = \frac{S}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{i}k}{k'}\right) e^{\mathrm{i}(k-k')a}. \tag{2.90}$$

从而 (2.87)—(2.90) 四式中解得 R, S, C_1 和 C_2, 由 (2.83) 及 (2.85) 式, 即得所要求的波函数 $u=u(x)$. 但我们感兴趣的只是概率波在遭遇势垒后的反射和透射情况, 因此仅需计算 R 及 S, 并讨论它们的物理意义.

由 (2.45) 式, 易知一维情况的概率流密度为

$$j=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\bar{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\right). \tag{2.91}$$

在 (2.91) 式中, 将波函数取为入射波 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 就得到入射粒子流密度

$$\begin{aligned} j_i &= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) \\ &= \frac{\hbar k}{m}. \end{aligned} \tag{2.92}$$

在 (2.91) 式中, 取波函数为反射波 $u=R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, 就得到反射粒子流密度

$$|j_r|=\frac{\hbar k}{m}|R|^2. \tag{2.93}$$

类似地, 在 (2.91) 式中取 $u=S\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 可得透射粒子流密度

$$|j_t|=\frac{\hbar k}{m}|S|^2. \tag{2.94}$$

这样, 我们得到

$$\text{反射系数}=\left|\frac{j_r}{j_i}\right|=|R|^2 \tag{2.95}$$

及

$$\text{透射系数}=\left|\frac{j_t}{j_i}\right|=|S|^2. \tag{2.96}$$

下面, 我们来确定反射系数和透射系数.

从 (2.87)—(2.90) 四式中消去 C_1 和 C_2, 就得到

$$\left(1-\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)+R\left(1+\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)=S\left(1-\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')a} \tag{2.97}$$

及

$$\left(1+\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)+R\left(1-\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)=S\left(1+\frac{\mathrm{i}k}{k'}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')a}. \tag{2.98}$$

由以上两式消去 R，有

$$S\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}=\frac{2\mathrm{i}k/k'}{\left(1-\left(\frac{k}{k'}\right)^2\right)\mathrm{sh}(k'a)-2\mathrm{i}\frac{k}{k'}\mathrm{ch}(k'a)}. \tag{2.99}$$

由此立即得到透射系数

$$|S|^2=\frac{4k^2k'^2}{(k^2-k'^2)^2\mathrm{sh}^2(k'a)+4k^2k'^2\mathrm{ch}^2(k'a)}. \tag{2.100}$$

注意到

$$\mathrm{ch}^2(k'a)-\mathrm{sh}^2(k'a)=1$$

及 k 和 k' 的定义 (2.82) 和 (2.86) 式，(2.100) 式可改写为

$$\begin{aligned}|S|^2&=\frac{4k^2k'^2}{(k^2+k'^2)^2\mathrm{sh}^2(k'a)+4k^2k'^2}\\&=\left(1+\frac{1}{\frac{4E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}\mathrm{sh}^2(k'a)\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.101}$$

类似地，从 (2.97) 和 (2.98) 式中消去 S，可得到反射系数

$$|R|^2=\frac{(k^2+k'^2)^2\mathrm{sh}^2(k'a)}{(k^2+k'^2)^2\mathrm{sh}^2(k'a)+4k^2k'^2}. \tag{2.102}$$

由 (2.101) 和 (2.102) 式立即可以看出，反射系数和透射系数满足以下关系：

$$|R|^2+|S|^2=1. \tag{2.103}$$

这也反映了概率守恒 (或粒子数守恒).

由 (2.101) 式可见，透射系数 $|S|^2\neq 0$. 这意味着，即使势垒比粒子的动能还高，但粒子还是存在穿过势垒的概率. 这称为隧道效应，是由粒子的波动性引起的.

2° $E > V_0$ 的情况.

在这种情况下, 只需在 (2.100) 式中, 把 k' 换为 $\mathrm{i}\,k_1$, 其中

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}, \tag{2.104}$$

并注意到

$$\mathrm{sh}(\mathrm{i}\,k_1 a) = \mathrm{i}\sin(k_1 a), \quad \mathrm{ch}(\mathrm{i}\,k_1 a) = \cos(k_1 a),$$

就得到透射系数为

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \frac{4k^2k_1^2}{(k^2-k_1^2)^2\sin^2(k_1 a)+4k^2k_1^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_1}-\frac{k_1}{k}\right)^2\sin^2(k_1 a)}, \end{aligned} \tag{2.105}$$

其中 k 和 k_1 分别由 (2.82) 和 (2.104) 式给出. 反射系数 $|R|^2$ 则可由透射系数 $|S|^2$ 与守恒关系式 (2.103) 确定.

§3. 量子力学基本原理简介

为了完整起见, 在这一节里, 我们对量子力学的基本原理以及由此得到的推论作一简单介绍. 严格地说, 这些基本原理 (包括作为量子力学基本方程的薛定谔方程) 都是一些以实验事实为基础的假设.

3.1. 有关量子力学原理的基本假设

1° 一个体系中的粒子状态, 由时间和空间坐标的复值函数 —— 波函数 ψ 来描述. 在空间体积微元 $\mathrm{d}x$ 中找到粒子的概率为 $|\psi|^2\mathrm{d}x = \bar{\psi}\psi\mathrm{d}x$

若波函数 ψ 满足

$$\int |\psi|^2\mathrm{d}x = 1, \tag{3.1}$$

则称其为*规范化*或*归一化*的.

波函数是不能直接观测的, 而我们所关心的是相应于一个 (由波函数描述的) 状态的粒子位置、动量及能量等所谓可观测的量. 为了由描

述粒子状态的波函数得到这些力学量，就需要借助与力学量对应的算子

2° 每一个力学量 A (不限于经典的力学量，例如自旋) 都对应于希尔伯特空间中的一个线性埃尔米特 (Hermite) 算子 $\widehat{A}$ 这个算子对波函数的作用是把一个波函数 (态) 变换为另一个波函数 (态). 如果描述体系状态的波函数 ψ 是算子 $\widehat{A}$ 的特征函数，即成立

$$\widehat{A}\psi = a\psi, \tag{3.2}$$

那么测量相应于状态 ψ 的力学量 A, 所得的测定值就是相应于该特征函数 ψ 的特征值 a.

例 3.1. 对粒子位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 相应的算子 $\widehat{x}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ 作用于波函数 ψ, 其结果为 $x_k\psi$, 即以 x_k 乘以 ψ.

例 3.2. 对动量 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, 相应的算子 $\widehat{p}_k = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, 3)$ 有时记 $\widehat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$, 但它是一个向量算子.

例 3.3. 粒子的经典角动量为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}. \tag{3.3}$$

其分量分别为

$$\begin{aligned} l_1 &= x_2p_3 - x_3p_2, \\ l_2 &= x_3p_1 - x_1p_3, \\ l_3 &= x_1p_2 - x_2p_1. \end{aligned}$$

相应的算子则分别为

$$\begin{cases} \widehat{l}_1 = -\mathrm{i}\hbar\left(x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} - x_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right), \\ \widehat{l}_2 = -\mathrm{i}\hbar\left(x_3\dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ \widehat{l}_3 = -\mathrm{i}\hbar\left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

(3.4) 式又可写为

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{x} \times \hat{\boldsymbol{p}}. \tag{3.5}$$

例 3.4. 设势场 $V(\boldsymbol{x})$ 中粒子的能量由哈密顿量

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 + V(\boldsymbol{x})$$

给出．与其相应的算子即哈密顿算子

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}).$$

3° 若描述粒子状态的波函数 ψ 不是算子 $\hat{A}$ 的特征函数，那么，一次测量该力学量 A 的结果仍为算子 $\hat{A}$ 的某个特征值，且经过此次测量后，原先的状态转变为算子 $\hat{A}$ 相应于这个特征值的特征函数.

也就是说，在一个体系处于量子态 ψ (非特征态) 时，测量该力学量 A 一般会出现各种可能的结果 (对应于不同的特征态)，且出现每种可能的结果都有确定的概率．对于都用 ψ 来描述其状态的大量完全相同的体系，如进行多次测量 (每个体系最多只测量一次)，所得结果的平均值为

$$\langle A\rangle = \int \overline{\psi}\hat{A}\psi\, \mathrm{d}x, \tag{3.6}$$

这里假定 ψ 是规范化的．测量结果围绕平均值的涨落 ΔA 由下式确定：

$$(\Delta A)^2 = \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle = \int \overline{\psi}(\hat{A} - \langle A\rangle)^2\psi\,\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

4° 描述粒子体系状态的波函数 (关于时间 t) 的演化满足如下的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \tag{3.8}$$

其中 $\widehat{H}$ 为哈密顿算子.

3.2. 算子的对易关系

设 $\hat{A}$ 及 $\hat{B}$ 为希尔伯特空间中的两个线性算子．一般来说，它们的乘积 (理解为算子的连续作用) 不满足交换律．$\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 之间的换位算子

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{3.9}$$

在量子力学中通常称为 *对易式*. 我们有如下对易关系

(a) 基本对易式

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\,\hbar\delta_{kj}. \tag{3.10}$$

事实上

$$\begin{aligned} x_1\hat{p}_1\psi &= -\mathrm{i}\,\hbar x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \\ \hat{p}_1(x_1\psi) &= -\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\psi), \end{aligned}$$

从而

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1]\psi = x_1\hat{p}_1\psi - \hat{p}_1(x_1\psi) = \mathrm{i}\,\hbar\psi.$$

对其它各式可类似地证明.

(b) 角动量的对易式

$$[\hat{l}_k, \hat{l}_k] = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \tag{3.11}$$

$$[\hat{l}_1, \hat{l}_2] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{l}_3, \quad [\hat{l}_2, \hat{l}_3] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{l}_1, \quad [\hat{l}_3, \hat{l}_1] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{l}_2. \tag{3.12}$$

我们只证明 (3.12) 中的第一式. 由 $\hat{\boldsymbol{l}}$ 分量的定义 (3.4), 有

$$\begin{aligned} \hat{l}_1\hat{l}_2\psi &= -\mathrm{i}\,\hbar\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(-\mathrm{i}\,\hbar)\left(x_3\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) \\ &= -\hbar^2\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - x_1x_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right. \\ &\qquad\left. - x_3^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} + x_1x_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right) \\ &= -\hbar^2\left(x_2x_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} - x_1x_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} - x_3^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right. \\ &\qquad\left. + x_1x_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right) - \hbar^2 x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} \hat{l}_2\hat{l}_1\psi &= -\hbar^2\left(x_2x_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} - x_3^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} - x_1x_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right. \\ &\qquad\left. + x_1x_3\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right) - \hbar^2 x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

将以上两式相减，即得

$$[\hat{l}_1,\hat{l}_2]\psi = \hbar^2\left(x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = \mathrm{i}\,\hbar\hat{l}_3\psi.$$

这就证明了 (3.12) 中的第一式. 其余各式可类似地证明 (作为习题).

3.3. 测不准关系

首先讨论同时测量两个力学量的问题. 这在经典物理学中是不成问题的：原则上，在任何状态下同时测量多个力学量都能够得到确定的值. 但在量子力学中，情况就不同了. 由前述假设 2°，在某个状态下同时测量两个力学量，又要求它们都有确定值，这个状态必须是相应于这两个力学量的算子的共同特征态.

下面对这一问题作进一步的考察. 对某一状态 ψ，测量力学量 A 及 B 的不确定性，分别由其涨落 ΔA 和 ΔB 表示. 由涨落的定义 (3.7) 及算子的埃尔米特性质 (复对称性)，有

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \int |(\hat{A}-\langle A\rangle)\psi|^2\mathrm{d}x,\\ (\Delta B)^2 &= \int |(\hat{B}-\langle B\rangle)\psi|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用算子的埃尔米特性质及许瓦尔兹 (Schwarz) 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\int \overline{\psi}(\hat{A}-\langle A\rangle)(\hat{B}-\langle B\rangle)\psi\mathrm{d}x\right|^2\\ =\ &\left|\int \overline{(\hat{A}-\langle A\rangle)\psi}\cdot(\hat{B}-\langle B\rangle)\psi\mathrm{d}x\right|^2\\ \leqslant\ &\int |(\hat{A}-\langle A\rangle)\psi|^2\mathrm{d}x\cdot\int |(\hat{B}-\langle B\rangle)\psi|^2\mathrm{d}x\\ =\ &(\Delta A\cdot\Delta B)^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

不难直接验证

$$(\hat{A}-\langle A\rangle)(\hat{B}-\langle B\rangle) = \hat{G}+\mathrm{i}\,\hat{C},\tag{3.14}$$

其中

$$\hat{G} = \frac{1}{2}((\hat{A}-\langle A\rangle)(\hat{B}-\langle B\rangle)+(\hat{B}-\langle B\rangle)(\hat{A}-\langle A\rangle)),\tag{3.15}$$

$$\hat{C} = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\hat{A},\hat{B}],\tag{3.16}$$

且 $\hat{G}$ 和 $\hat{C}$ 均为埃尔米特算子. 这样, $\int\bar{\psi}\hat{G}\psi\mathrm{d}x$ 和 $\int\bar{\psi}\hat{C}\psi\mathrm{d}x$ 均为实数, 从而由 (3.14) 式易得

$$\begin{aligned}&\left|\int\bar{\psi}(\hat{A}-\langle A\rangle)(\hat{B}-\langle B\rangle)\psi\mathrm{d}x\right|^2\\=&\left|\int\bar{\psi}\hat{G}\psi\mathrm{d}x\right|^2+\left|\int\bar{\psi}\hat{C}\psi\mathrm{d}x\right|^2.\end{aligned}$$

再由 (3.13) 式, 并注意到 (3.16) 式, 就得到

$$\begin{aligned}(\Delta A\cdot\Delta B)^2 &\geqslant \left|\int\bar{\psi}\hat{C}\psi\mathrm{d}x\right|^2\\&= \frac{1}{4}\left|\int\bar{\psi}[\hat{A},\hat{B}]\psi\mathrm{d}x\right|^2,\end{aligned}$$

即

$$|\Delta A\cdot\Delta B|\geqslant\frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|. \tag{3.17}$$

这就是对量子态而言, 任意两个力学量的涨落必须满足的关系式, 称为测不准关系.

例 3.5. 设 $\hat{A}=\hat{x}_1$, $\hat{B}=\hat{p}_1$. 由对易关系 (3.10), 有

$$[\hat{x}_1,\hat{p}_1]=\mathrm{i}\hbar.$$

利用测不准关系 (3.17), 立即得到

$$|\Delta x_1\cdot\Delta p_1|\geqslant\hbar/2. \tag{3.18}$$

这说明不可能同时测得粒子的位置与速度的精确值.

由 (3.17) 式可见, 如果两个力学量 A 及 B 对应的算子 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 不对易 (即 $[\hat{A},\hat{B}]\neq 0$), 则一般来说, ΔA 和 ΔB 不能同时为零, 即 A 与 B 不能同时有确定的值, $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 也不可能有共同的特征函数. 因此, 两个力学量 A 和 B 可以同时具有确定观测值的条件为

$$[\hat{A},\hat{B}]=0. \tag{3.19}$$

§4. 相对论量子力学与狄拉克 (Dirac) 方程

薛定谔方程是非相对论量子力学的基本方程. 它用于描述原子和分子的绝大多数现象, 包括低能核物理的许多现象, 都是很成功的. 这是因为在这些现象中, 粒子运动的速度远小于光速, 相对论效应不显著, 薛定谔方程是一个很好的近似. 但一涉及高能领域, 在许多情况下, 非相对论性的薛定谔方程就显得无能为力, 而必须在相对论效应下考虑波函数满足的方程.

4.1. 克莱因—高登 (Klein–Gordon) 方程

薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)\psi$$

在形式上关于时间与空间变量的地位是不对等的 (关于时间 t 是一阶偏导数, 关于空间变量是二阶偏导数), 因而这个方程在洛伦兹变换下不具有不变性.

几乎与提出薛定谔方程同时, 就有人提出了相对论性波动方程. 由狭义相对论中的能量—动量公式

$$E^2-c^2\boldsymbol{p}^2=E_0^2, \tag{4.1}$$

其中 E 及 $\boldsymbol{p}$ 分别为粒子的总能量和动量, $E_0=m_0c^2$ 为粒子的静止能量, 而 c 为光速, m_0 为粒子的静止质量 (见第九章 (4.31) 和 (4.32) 式), 我们有

$$E^2=c^2|\boldsymbol{p}|^2+m_0^2c^4. \tag{4.2}$$

在 (4.2) 式中形式地作由 (2.10) 式给出的替换

$$E\to\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t},\quad \boldsymbol{p}\to-\mathrm{i}\hbar\nabla,$$

并将所得的算子作用于波函数 ψ, 就得到

$$\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-c^2\hbar^2\Delta\psi+m_0^2c^4\psi. \tag{4.3}$$

这个方程称为克莱因—高登方程. 注意到方程 (4.3) 可写为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi=0. \tag{4.4}$$

由波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi=0$$

关于洛伦兹变换的不变性 (见第九章 §2), 立即可以得到克莱因—高登方程关于洛伦兹变换的不变性.

克莱因—高登方程虽然满足洛伦兹不变性, 但由于其中含有波函数关于 t 的二阶偏导数, 在对波函数进行解释时遇到了很大的困难. 如果仍用

$$\rho=|\psi(t,\boldsymbol{x})|^2$$

定义粒子的概率密度, 由于此时不再成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\rho\mathrm{d}x=0,$$

这是不合理的. 人们虽曾有过各种尝试, 企图修改 ρ 的定义使上式得以成立, 但均未获得成功. 这样, 用克莱因—高登方程作为描述自由粒子状态的波动方程并不合适, 而该方程也被搁置达七年之久. 直到 1934 年, 泡利 (W. Pauli) 和维斯考夫 (V. Weisskopf) 给予这个方程以新的解释: 它不是一个单独粒子的波动方程, 而是一个场方程 (如同麦克斯韦方程组是电磁场的方程那样), 并对它进行了量子化, 才重新引起人们的注意.

4.2. 电子自旋

前面对由粒子组成的量子系统, 只用一个分量的波函数来描述的作法有些过于粗略. 实验表明, 已发现的大多数粒子均存在“自旋”; 只有少数可称作标量子的粒子, 如 π 介子的核及某些原子, 其自旋为零. 对于自旋为零的粒子, 只用一个分量的波函数就可以了; 但对自旋不为零的粒子, 只用一个分量的波函数就不够了.

历史上, 电子的自旋是 1925 年为了解释光谱线的精细 (多重) 结构, 特别是碱金属光谱的双线结构而引进的. 例如, 钠 (Na) 原子光谱中的一条很亮的黄线, 如用高分辨率的光谱仪进行观察, 就发现它由

很靠近的两条谱线组成，其波长分别为 5890 Å 和 5896Å, 仅相差 6Å ($1\text{Å} = 10^{-10}$ m). 为了解释这一现象，提出了电子自旋的假设：电子除了绕原子核运动外，还有自旋，且自旋角动量在空间任何方向的投影只取两个值.

最初的自旋假设的把电子的运动视为地球绕太阳运动那样：一方面电子绕原子核运动，有相应的轨道角动量；另一方面又有自转，有相应的自转角动量. 但是，把电子自旋视为机械的自转是不正确的. 实际上，电子自旋的角动量不能用普通机械运动的角动量 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ 来表示，而需要从角动量的对易关系出发来讨论.

设 $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 表示电子的自旋角动量. 由角动量算子的对易关系 (3.12) 式，应有

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{S}_1\widehat{S}_2 - \widehat{S}_2\widehat{S}_1 = \mathrm{i}\,\hbar\widehat{S}_3, \\ \widehat{S}_2\widehat{S}_3 - \widehat{S}_3\widehat{S}_2 = \mathrm{i}\,\hbar\widehat{S}_1, \\ \widehat{S}_3\widehat{S}_1 - \widehat{S}_1\widehat{S}_3 = \mathrm{i}\,\hbar\widehat{S}_2, \end{array}\right. \tag{4.5}$$

其中 $\widehat{S}_j$ 表示相应于 S_j 的算子. 由 (4.5) 式可以证明：角动量分量 $\widehat{S}_3$ (对于 $\widehat{S}_1$ 和 $\widehat{S}_2$ 也如此) 共有 $2s+1$ 个特征值，它们是

$$\lambda = m_s\hbar \quad (m_s = -s, -s+1, \cdots, s-1, s)$$

(见 [4]). 但实验表明，电子自旋角动量在任何方向的分量只有两个可能值，因此，“自旋”有时被认为是所有物理量中最“量子力学”的. 这样，就应有 $2s+1=2$, 即 $s=\frac{1}{2}$, 从而 $m_s = \pm\frac{1}{2}$. 这就是说，角动量在任何方向的分量只能取 $\pm\hbar/2$, 恰为玻尔当时对电子给出的量子化角动量最小值的一半 (参见 (1.10) 式). 不仅是对电子，对质子及中子等，情况也是如此. 这种自旋为 $\hbar/2$ 的奇数倍的粒子称为费米 (Fermi) 子.

这样，电子就不是一个仅有三个自由度的粒子，还具有自旋这个自由度. 因此，要对电子的状态进行完全的描述，必须考虑其自旋状态，精确地说，要考虑自旋在某个方向 (通常取为 x_3 轴方向) 投影的两个可能的取值情况. 这样，波函数除依赖于 $\boldsymbol{x}$ 外，还应依赖于自旋投影这个变量 (通常取为 S_3):

$$\psi(\boldsymbol{x}, S_3) = \begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{x}, \hbar/2) \\ \psi(\boldsymbol{x}, -\hbar/2) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

这个波函数称旋量波函数, 其物理意义如下: $|\psi(\boldsymbol{x},\hbar/2)|^2$ 表示位置在 $\boldsymbol{x}$ 处自旋向上 (即 $S_3=\hbar/2$) 的电子的概率密度; 而 $|\psi(\boldsymbol{x},-\hbar/2)|^2$ 表示位置在 $\boldsymbol{x}$ 处自旋向下 (即 $S_3=-\hbar/2$) 的电子的概率密度.

令

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

由 (4.6) 式给出的波函数可以表为

$$\psi(\boldsymbol{x},S_3)=\psi(\boldsymbol{x},\hbar/2)\alpha+\psi(\boldsymbol{x},-\hbar/2)\beta. \tag{4.8}$$

因此, 自旋波函数可以用 2 行 1 列的矩阵 α 和 β 表示, 相应地, 自旋算子就要用 2 阶方阵表示, 使算子矩阵与波函数的乘积仍是一个波函数. 为简单计, 代替自旋角动量算子 $\widehat{S}$, 由下式引进泡利算子 σ:

$$\widehat{S}=\frac{1}{2}\hbar\sigma. \tag{4.9}$$

设 σ 的分量分别为 σ_1、σ_2 及 σ_3, 由 $\widehat{S}$ 满足的对易关系 (4.5) 可得

$$\begin{cases}\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_1=2\,\mathrm{i}\,\sigma_3,\\ \sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_2=2\,\mathrm{i}\,\sigma_1,\\ \sigma_3\sigma_1-\sigma_1\sigma_3=2\,\mathrm{i}\,\sigma_2.\end{cases} \tag{4.10}$$

由于 $\widehat{S}$ 沿任何方向的投影只能取值 (即其特征值) $\pm\hbar/2$, σ 沿任何方向的投影只能取值 ±1. 因此, 如果将 σ 的分量用 2 阶方阵表示, 那么这些矩阵的特征值就都是 ±1, 从而

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I, \tag{4.11}$$

其中 I 为 2 阶单位阵.

以 σ_2 分别左乘及右乘 (4.10) 中的第 2 式, 并利用 (4.11) 式, 即得

$$\begin{aligned}\sigma_3-\sigma_2\sigma_3\sigma_2&=2\,\mathrm{i}\,\sigma_2\sigma_1,\\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2-\sigma_3&=2\,\mathrm{i}\,\sigma_1\sigma_2.\end{aligned}$$

将以上两式相加, 就有

$$\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=0.$$

类似地可证明，σ_1、σ_2 和 σ_3 满足下述反对易关系：

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0, \quad \forall j \neq k \tag{4.12}$$

再利用 (4.10) 式，就得到 σ_1、σ_2 及 σ_3 之间应满足的代数关系

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = \mathrm{i}\,\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = \mathrm{i}\,\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = \mathrm{i}\,\sigma_2. \end{cases} \tag{4.13}$$

下面来求 σ_1、σ_2 及 σ_3 的具体矩阵表示．先考察 σ_3．设

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

因为由 (4.7) 式给出的 α 及 β 分别为 σ_3 相应于特征值 1 及 -1 的特征向量，就有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由此立即得到

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

又设

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

σ_1 作为一个力学量相应的算子，必是埃尔米特的 (Hermitian)，其相应的矩阵为埃尔米特阵：$\sigma_1^* = \sigma_1$，其中 σ_1^* 为 σ_1 的转置共轭．这就要求 $b_{21} = \bar{b}_{12}$，故

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \bar{b}_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

由反对易关系 (4.13) 中的第三式及 (4.14) 式，有

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \bar{b}_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \bar{b}_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

从而得到

$$b_{11} = b_{22} = 0.$$

再利用 $\sigma_1^2 = I$ (见 (4.11) 式), 又有

$$|b_{12}|^2 = 1,$$

从而 $b_{12} = e^{i\theta}$. 通常取 $\theta = 0$, 这样就有

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

在求得 σ_1, σ_3 后, 再利用 (4.13) 中的第 3 式, 就立刻得到

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

由 (4.15), (4.16) 及 (4.14) 式给出的 2 阶矩阵 σ_1, σ_2 及 σ_3 称为泡利阵. 泡利阵非但是自旋算子的一种重要表示, 其它的应用也极其广泛.

4.3. 狄拉克方程

为了克服克莱因—高登方程所遇到的困难, 狄拉克 (P. A. M. Dirac) 在 1928 年提出了电子的相对论波动方程.

受到泡利在非相对论量子力学中用两个分量的波函数描述电子运动的启发, 狄拉克提出波函数应为向量的形式:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \psi_2(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \psi_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

其中 ψ_k $(k = 1, \cdots, n)$ 均为复值函数, 而电子在空间的概率密度则定义为

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} |\psi_k(t, \boldsymbol{x})|^2. \tag{4.18}$$

上述定义的概率密度显然满足非负性要求, 即

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) \geqslant 0. \tag{4.19}$$

对于由 (4.17) 式给出的波函数，提出如下要求：

1° 保证总概率守恒，即成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x=0. \tag{4.20}$$

2° 波函数满足的方程具有洛伦兹不变性.

3° 波函数的每一个分量 $\psi_k(t,\boldsymbol{x})$ 均满足克莱因–高登方程 (4.4).

要求 1° 是很自然的. 2° 是对相对论物理规律的要求. 而要求 3° 则是受电磁场中麦克斯韦方程组的启发. 事实上，自由电磁波满足的麦克斯韦方程组是一个一阶偏微分方程组 (下面将会看到，在要求 1° 和 2° 下，波函数 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 满足的方程也应是一个一阶偏微分方程组)，但电场和磁场的每一个分量均满足波动方程 (见第一章 (5.27) 和 (5.28) 式). 将波函数满足的方程与麦克斯韦方程组进行类比，狄拉克提出了对波函数的要求 3°.

下面我们考察，在要求 1°, 2° 及 3° 下，波函数 ψ 所满足的方程应具有怎样的形式.

为使 (4.20) 式成立，即

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\\ =&\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\overline{\psi}_k+\psi_k\frac{\partial\overline{\psi}_k}{\partial t}\right)\mathrm{d}x=0,\end{aligned} \tag{4.21}$$

当 $\psi_k\ (k=1,\cdots,n)$ 给定时，$\dfrac{\partial\psi_k}{\partial t}\ (k=1,\cdots,n)$ 就不能任意取值. 这样，波函数满足的方程就只能含有波函数关于时间 t 的一阶偏导数. 而在相对论时空观里，空间坐标与时间坐标处于对等的地位，若要求该方程具有洛伦兹不变性，它也只应包含波函数关于空间变量 $\boldsymbol{x}$ 的一阶偏导数. 因此，考虑到克莱因–高登方程 (4.4) 的形式，狄拉克建议将电子的波函数所满足的波动方程取为如下形式：

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}A_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\frac{\mathrm{i}\,m_0c}{\hbar}B\psi=0, \tag{4.22}$$

其中 $A_j\ (j=1,2,3)$ 及 B 均为无量纲的 n 阶方阵. 考虑到时间与空间的均匀性，A_j 及 B 还应与 t 及 $\boldsymbol{x}$ 无关，其元素为复常数.

方程组 (4.22) 也可写为如下哈密顿系统的形式:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\widehat{H}\psi, \tag{4.23}$$

其中哈密顿算子

$$\begin{aligned}\widehat{H}&=-\mathrm{i}\hbar c\sum_{j=1}^{3}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+m_0c^2B\\&=c\sum_{j=1}^{3}A_j\hat{p}_j+m_0c^2B,\end{aligned} \tag{4.24}$$

这里利用了 $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$. 相应的哈密顿量为

$$H=c\sum_{j=1}^{3}A_jp_j+m_0c^2B. \tag{4.25}$$

为了保证概率守恒律 (4.20) 式成立, 还应要求哈密顿算子 $\widehat{H}$ 是埃尔米特的, 即 A_j 及 B 均为埃尔米特阵:

$$A_j^*=A_j\quad(j=1,2,3),\quad B^*=B, \tag{4.26}$$

其中 A_j^* 表示 A_j 的共轭转置阵: $A_j^*=(\bar{A}_j)^{\mathrm{T}}$ 等.

事实上, 在 A_j $(j=1,2,3)$ 及 B 均为埃尔米特阵的假设下, 对方程组 (4.22) 两端取共轭转置, 得

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_j}A_j-\frac{\mathrm{i}\,m_0c}{\hbar}\psi^*B=0. \tag{4.27}$$

以 ψ^* 左乘方程组 (4.22), 以 ψ 右乘方程组 (4.27), 并将所得的结果相加, 就得到

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi^*A_j\psi)=0, \tag{4.28}$$

即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0, \tag{4.29}$$

其中 $\rho = \psi^*\psi$ 是 (4.18) 式给出的概率密度，而

$$j = c(\psi^* A_1\psi, \psi^* A_2\psi, \psi^* A_3\psi)^{\mathrm{T}} \tag{4.30}$$

称为概率流密度向量. 只要在 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ 时，$\psi(t, \boldsymbol{x})$ 以足够快的速度趋向于零，利用格林公式，由 (4.29) 式立即得到概率守恒律 (4.20).

按要求 3°, 波函数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ 的每一个分量均应满足克莱因–高登方程 (4.4), 即应成立

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{4.31}$$

由这一要求会得到什么结论呢？以算子

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} A_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\mathrm{i}\, m_0c}{\hbar}B$$

作用于方程 (4.22) 的两边，有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} A_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\mathrm{i}\, m_0c}{\hbar}B\right) \\
&\qquad \cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} A_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\mathrm{i}\, m_0c}{\hbar}B\right)\psi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}(A_jA_k + A_kA_j)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k} \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}\, m_0c}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}(A_jB + BA_j)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}B^2\psi = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

比较方程组 (4.32) 与 (4.31) 的系数阵，就得到对 $j, k = 1, 2, 3$ 成立

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A_jA_k + A_kA_j) = \begin{cases} I, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \\
&A_jB + BA_j = 0, \\
&B^2 = I,
\end{aligned}$$

其中 I 表示 n 阶单位阵. 这就是说，这些系数阵需满足以下性质：

(1) $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = B^2 = I$;

(2) A_1、A_2、A_3 及 B 之中的任意两个都是反对易的，即交换其乘积的次序只改变符号.

方程组 (4.22) 系数阵应满足的埃尔米特性质和以上两条要求，已经概括了阵 A_1, A_2, A_3 及 B 的全部代数性质. 下面由此决定这些阵的表示形式.

首先说明，满足以上条件的这些阵的阶数，即狄拉克波函数分量的个数，只能是偶数. 事实上，由 A_j 与 B 的反对易性有

$$A_jB = -BA_j$$

由此得到

$$\det A_j \cdot \det B = (-1)^n \det B \cdot \det A_j.$$

由 (1) 知，$\det A_j$ 和 $\det B$ 均不为零. 因此 $(-1)^n = 1$, 即 n 为偶数.

其次说明，必成立 $n \geqslant 4$. 为此先证明下述引理.

引理 4.1. *设 2 阶阵 A_1、A_2 和 A_3 两两反对易，且成立 $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = I$, 则 A_1、A_2, A_3 及 I 在所有 2 阶埃尔米特阵组成的实向量空间中是完备的，即任一 2 阶埃尔米特阵一定可以表示为它们的实线性组合.*

证明 注意到所有 2 阶埃尔米特阵组成的实向量空间等价于 $\mathbb{R}^4$, 只需证明 A_1、A_2, A_3 及 I 线性无关即可. 设存在实数 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 及 λ_3 使

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0, \tag{4.33}$$

我们要证明 $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

以 A_3 分别左乘及右乘上式，可得

$$\lambda_0 A_3 + \lambda_1 A_3 A_1 + \lambda_2 A_3 A_2 + \lambda_3 A_3^2 = 0$$

及

$$\lambda_0 A_3 + \lambda_1 A_1 A_3 + \lambda_2 A_2 A_3 + \lambda_3 A_3^2 = 0.$$

将以上两式相加，并注意到 A_3 与 A_1 及 A_2 的反对易性以及 $A_3^2 = I$, 立即得到

$$\lambda_0 A_3 + \lambda_3 I = 0.$$

但由 A_3 满足的上述性质 (1) 及 (2) 易知，A_3 既不可能是零矩阵，也不可能是单位阵与一个实数的乘积，因此由上式有 $\lambda_0 = \lambda_3 = 0$. 这样，(4.33) 式变为

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0$$

以 A_2 分别左乘及右乘上式，并将所得结果相加，利用 A_1 与 A_2 的反对易性，又可得 $\lambda_2 = 0$, 从而由上式可得 $\lambda_1 = 0$. 引理证毕.

如果 $n = 2$, 由引理 4.1, B 一定可以表示为 A_1, A_2, A_3 及 I 的线性组合. 但用证明引理 4.1 同样的方法，又可以证明 A_1、A_2、A_3, B 及 I 是线性无关的 (作为习题). 这就导致矛盾，从而 $n \geqslant 4$.

取 $n = 4$. 此时满足上述要求 (1) 及 (2) 的 A_j ($j = 1, 2, 3$) 及 B 并不是唯一的，可以有不同的表示. 常用的一种表示称为泡利 - 狄拉克表象. 在这种表象中，取 B 为对角阵，且考虑到 $B^2 = I$, 取

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

其中 I 为 2 阶单位阵. 再设

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3), \tag{4.35}$$

其中 $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ 及 δ_j 均为 2 阶阵. 利用 A_j 与 B 的反对易关系，并注意到 B 的表示 (4.34), 就得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_j & -\beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix}.$$

所以 $\alpha_j = \delta_j = 0$, 从而 (4.35) 式变成

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ \gamma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3).$$

但 A_j 为埃尔米特阵，应有 $\gamma_j = \beta_j^*$, 所以

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ \beta_j^* & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3).$$

再利用 $A_j^2 = I$, 又有

$$\beta_j\beta_j^* = \beta_j^*\beta_j = I.$$

不妨取 β_j 亦为埃尔米特阵, 即成立 $\beta_j^* = \beta_j$, 就有

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1,2,3), \tag{4.36}$$

而

$$\beta_j^2 = I \quad (j = 1,2,3) \tag{4.37}$$

再利用反对易关系. $A_jA_k = -A_kA_j \ (k \neq j)$, 由 (4.36) 式可得

$$\begin{pmatrix} \beta_j\beta_k & 0 \\ 0 & \beta_j\beta_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \beta_k\beta_j & 0 \\ 0 & \beta_k\beta_j \end{pmatrix}, \quad k \neq j.$$

这说明 β_1, β_2 及 β_3 之间也满足反对易关系:

$$\beta_j\beta_k = -\beta_k\beta_j, \quad k \neq j \tag{4.38}$$

由本节第 2 段中对电子自旋角动量的讨论可见, 泡利阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足 (4.37) 和 (4.38) 式对 $\beta_j \ (j = 1,2,3)$ 的要求; 而且根据引理 4.1, 上述三个泡利阵连同 2 阶单位阵在所有 2 阶埃尔米特阵组成的实向量空间中是完备的. 因此可以取

$$\beta_j = \sigma_j \quad (j = 1,2,3).$$

于是, 由 (4.36) 式即有

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1,2,3). \tag{4.39}$$

由 (4.39) 和 (4.34) 式，并利用泡利阵的表达式，我们得到

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这就是 A_j $(j = 1,2,3)$ 和 B 在泡利—狄拉克表象中的表示.

将上述表示代入方程组 (4.22) 中，就得到在泡利—狄拉克表象中波函数满足的方程组为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{\mathrm{i}m_0c}{\hbar}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}=0. \tag{4.40}$$

它称为狄拉克方程组, 是相对论量子力学的基本方程组.

4.4. 自由电子的平面波解

讨论狄拉克方程组 (4.40) 的平面波解, 即求其形如

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=\phi(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar} \tag{4.41}$$

的解 (参见(2.9)式). 将上式代入方程组(4.22),可得 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\left(\sum_{j=1}^{3}cp_jA_j+m_0c^2B\right)\phi=E\phi. \tag{4.42}$$

注意到 A_j 和 B 的矩阵表示 (4.39) 及 (4.34), 易知上式可写为

$$(E-m_0c^2)\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}-c(\sigma\cdot\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\phi_3\\\phi_4\end{pmatrix}=0 \tag{4.43}$$

及

$$c(\sigma\cdot\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}+(E+m_0c^2)\begin{pmatrix}\phi_3\\\phi_4\end{pmatrix}=0, \tag{4.44}$$

其中

$$\sigma\cdot\boldsymbol{p}=\sum_{j=1}^{3}p_j\sigma_j. \tag{4.45}$$

线性代数方程组 (4.43)—(4.44) 有非平凡解的充分必要条件为

$$\det\begin{pmatrix}(E-m_0c^2)I & -c\sigma\cdot\boldsymbol{p}\\ -c\sigma\cdot\boldsymbol{p} & (E+m_0c^2)I\end{pmatrix}=0,$$

易知它等价于

$$\det((E^2-m_0^2c^4)I-c^2(\sigma\cdot\boldsymbol{p})^2)=0.$$

但由泡利阵满足的 (4.37)—(4.38) 式，有 $(\sigma\cdot\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2I$，于是上述条件化为

$$E^2-m_0^2c^4-c^2|\boldsymbol{p}|^2=0. \tag{4.46}$$

从这个方程可以解得

$$E_\pm=\pm c\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m_0^2c^2}. \tag{4.47}$$

这两个解分别称为正能量解与负能量解. 下面将会看到，对应于正、负能量解，线性代数方程组 (4.43)—(4.44) 均各有两个线性无关的解.

由方程组 (4.43)—(4.44) 可解得

$$\begin{pmatrix}\phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix}=\frac{c}{E+m_0c^2}(\sigma\cdot\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{4.48}$$

或

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\frac{c}{E-m_0c^2}(\sigma\cdot\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix} \tag{4.49}$$

其中矩阵

$$\sigma\cdot\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_3 & p_1-\mathrm{i}\,p_2\\ p_1+\mathrm{i}\,p_2 & -p_3\end{pmatrix} \tag{4.50}$$

有两个特征值

$$\lambda_\pm=\pm|\boldsymbol{p}|, \tag{4.51}$$

而相应这两个特征值的特征向量分别可取为

$$\begin{pmatrix}p_1-\mathrm{i}\,p_2\\ |\boldsymbol{p}|-p_3\end{pmatrix}\quad 和\quad \begin{pmatrix}p_1-\mathrm{i}\,p_2\\ -|\boldsymbol{p}|-p_3\end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

对应于 $E=E_+$，在 (4.48) 式中分别取 $(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm{T}}$ 为上述两个特征向量，就得到方程组 (4.43)—(4.44) 的两个线性无关的解

$$\phi=\begin{pmatrix}p_1-\mathrm{i}\,p_2\\ |\boldsymbol{p}|-p_3\\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(p_1-\mathrm{i}\,p_2)}{E_++m_0c^2}\\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}|-p_3)}{E_++m_0c^2}\end{pmatrix}\quad 及\quad \begin{pmatrix}p_1-\mathrm{i}\,p_2\\ -(|\boldsymbol{p}|+p_3)\\ \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(p_1-\mathrm{i}\,p_2)}{E_++m_0c^2}\\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}|+p_3)}{E_++m_0c^2}\end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

将以上两个解代入 (4.41) 式，即得狄拉克方程组 (4.40) 相应于正能量 $E = E_+$ 的平面波解

$$\psi = \begin{pmatrix} p_1 - \mathrm{i}\, p_2 \\ |\boldsymbol{p}| - p_3 \\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(p_1 - \mathrm{i}\, p_2)}{E_+ + m_0c^2} \\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| - p_3)}{E_+ + m_0c^2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_+t)/\hbar} \tag{4.54}$$

及

$$\psi = \begin{pmatrix} p_1 - \mathrm{i}\, p_2 \\ -(|\boldsymbol{p}| + p_3) \\ \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(p_1 - \mathrm{i}\, p_2)}{E_+ + m_0c^2} \\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| + p_3)}{E_+ + m_0c^2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_+t)/\hbar}. \tag{4.55}$$

类似地，对应于 $E = E_-$，在 (4.49) 式中分别取 $(\phi_3, \phi_4)^{\mathrm{T}}$ 为由 (4.52) 给出的两个特征向量，就可得方程组 (4.43)—(4.44) 的两个线性无关的解为

$$\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(p_1 - \mathrm{i}\, p_2)}{|E_-| + m_0c^2} \\ \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| - p_3)}{|E_-| + m_0c^2} \\ p_1 - \mathrm{i}\, p_2 \\ |\boldsymbol{p}| - p_3 \end{pmatrix} \quad 及 \quad \begin{pmatrix} \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(p_1 - \mathrm{i}\, p_2)}{|E_-| + m_0c^2} \\ \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| + p_3)}{|E_-| + m_0c^2} \\ p_1 - \mathrm{i}\, p_2 \\ -(|\boldsymbol{p}| + p_3) \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

从而狄拉克方程组 (4.40) 相应于负能量 $E = E_-$ 的平面波解为

$$\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(p_1 - \mathrm{i}\, p_2)}{|E_-| + m_0c^2} \\ \dfrac{-c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| - p_3)}{|E_-| + m_0c^2} \\ p_1 - \mathrm{i}\, p_2 \\ |\boldsymbol{p}| - p_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_-t)/\hbar} \tag{4.57}$$

及

$$\psi=\begin{pmatrix}\dfrac{c|\boldsymbol{p}|(p_1-\mathrm{i}p_2)}{|E_-|+m_0c^2}\\ \dfrac{c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}|+p_3)}{|E_-|+m_0c^2}\\ p_1-\mathrm{i}p_2\\ (|\boldsymbol{p}|+p_3)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_-t)/\hbar}. \tag{4.58}$$

如果取电子动量沿 x_3 轴方向，则 $p_1=p_2=0$, $p_3=p$. 注意到

$$\lim_{p_1,p_2\to 0}\frac{|\boldsymbol{p}|-p_3}{p_1-\mathrm{i}p_2}=0,$$

在狄拉克方程组 (4.40) 的上述四个平面波解中选取适当的标量因子后，再令 $p_1,p_2\to 0$ 取极限，就分别得到

$$\psi=\begin{pmatrix}1\\0\\ \dfrac{cp}{E_++m_0c^2}\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_+t)/\hbar}, \tag{4.59}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ -\dfrac{cp}{E_++m_0c^2}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_+t)/\hbar}, \tag{4.60}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}-\dfrac{cp}{|E_-|+m_0c^2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_-t)/\hbar} \tag{4.61}$$

及

$$\psi=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{cp}{|E_-|+m_0c^2}\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_-t)/\hbar}, \tag{4.62}$$

其中 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=px_3$.

对应于正能量 $E=E_+$, 狄拉克方程组 (4.40) 有两个线性无关的平面波解 (4.59) 和 (4.60), 它们相应于电子的两种自旋状态. 这说明对于电子的每一种自旋状态, 有一个波函数. 为了进一步说明这一事实, 考察

$$p\ll m_0c$$

的情况. 此时, 对相应于正能量的解 (4.59) 和 (4.60), ψ_3 和 ψ_4 均很小, 称为小分量, 而 ψ_1 和 ψ_2 称为大分量. 忽略掉小分量部分, 其大分量部分为

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_+t)/\hbar} \tag{4.63}$$

及

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_+t)/\hbar}. \tag{4.64}$$

这正说明, 电子的自旋状态只有两个特征态.

在我们得到的平面波解中, 除了相应于正能量的解之外, 还有相应于负能量的解. 在经典物理学的意义下, 自由粒子的负能量是没有意义的. 但在量子力学中, 如果排除了相应于负能量的特征态, 特征函数系就不完备, 且由波函数按特征函数系的展开可知, 确实存在向负能量态迁移的概率. 狄拉克认为负能量态表示与电子不同的粒子, 即正电子状态. 在狄拉克提出这一预测三年之后, 安德孙 (C. D. Anderson) 于 1932 年在实验中发现了正电子的存在.

4.5. 狄拉克方程组的数学结构

在狄拉克方程组

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}A_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\frac{\mathrm{i}\,m_0c}{\hbar}B\psi=0 \tag{4.65}$$

中, ψ 为复值未知向量函数, $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ 的系数阵 $\dfrac{1}{c}I$ 为实对称正定阵, 系数阵 $A_j\ (j=1,2,3)$ 均为埃尔米特阵. 这种形式的一阶偏微分方程组, 称为一阶埃尔米特双曲型偏微分方程组.

一阶埃尔米特双曲组的性质与一阶对称双曲组几乎完全一样, 其定解问题的提法也与一阶对称双曲组一致. 这里不再详述.

需要指出的是，因为狄拉克方程组是一个一阶埃尔米特双曲型方程组，根据一阶对称双曲组的性质 (见第一章 §5), 其解具有有限的依赖区域，即扰动只有有限的传播速度. 这是狄拉克方程组与非相对论情况的薛定谔方程的一个重要区别. 此外，根据狭义相对论的理论 (见第九章 §3), 我们还可以断定，对狄拉克方程组而言，其扰动传播速度不能超过光速 c. 下面我们从数学上严格证明这一论断.

考察狄拉克方程组 (4.65) 满足下述初始条件

$$\psi(0, \boldsymbol{x}) = \psi^0(\boldsymbol{x}) \tag{4.66}$$

的柯西问题. 设 $(t^0, \boldsymbol{x}^0)$ $(t^0 > 0)$ 为四维时空中任意给定的一点，$\Gamma(t^0)$ 为过该点的光锥面

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| = c(t^0 - t)$$

与初始平面 $t = 0$ 所围成的锥形区域 (见图 6):

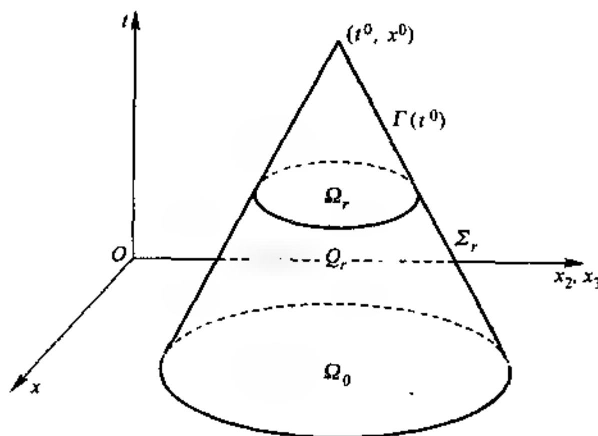


图 6

$$\Gamma(t^0) : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leqslant c(t^0 - t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t^0). \tag{4.67}$$

对任一时刻 $\tau \in [0, t^0]$, 以 Ω_τ 记超平面 $t = \tau$ 与锥形区域 $\Gamma(t^0)$ 相截而得的截面：

$$\Omega_\tau : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leqslant c(t^0 - t), \quad t = \tau. \tag{4.68}$$

我们有如下定理.

定理 4.1. 设 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 是狄拉克方程组 (4.65) 满足初始条件 (4.66) 的柯西问题的解，则成立

$$\int_{\Omega_\tau}\rho(\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega_0}\rho(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\quad(0\leqslant\tau\leqslant t^0),\tag{4.69}$$

其中 $\rho(t,\boldsymbol{x})$ 由 (4.18) 式给出

证明 记 Q_τ 为锥体 $\Gamma(t^0)$ 介于初始平面 $t=0$ 与 $t=\tau$ 之间的部分，而 Σ_τ 为其侧边界，即

$$Q_\tau:\quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|\leqslant c(t^0-t)\quad(0\leqslant t\leqslant\tau),\tag{4.70}$$

$$\Sigma_\tau:\quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|=c(t^0-t)\quad(0\leqslant t\leqslant\tau).\tag{4.71}$$

在 Q_τ 中积分守恒律方程 (4.29)，并利用格林公式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\tau}\rho(\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}\rho(0,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\\&+\int_{\Sigma_\tau}\left(\rho n_0+\sum_{k=1}^{3}j_kn_k\right)\mathrm{d}S=0,\end{aligned}\tag{4.72}$$

其中 (n_0,n_1,n_2,n_3) 表示 Σ_τ 上的单位外法线向量. 利用 Σ_τ 的方程 (4.71)，易知

$$\begin{aligned}&(n_0,n_1,n_2,n_3)\\=&\ \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(c,\frac{x_1-x_1^0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|},\frac{x_2-x_2^0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|},\frac{x_3-x_3^0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|}\right),\end{aligned}$$

再注意到 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 的定义 (4.18) 和 (4.30)，就有

$$\begin{aligned}&\rho n_0+\sum_{k=1}^{n}j_kn_k\\=&\ c\psi^*\left(\frac{n_0}{c}I+\sum_{k=1}^{3}n_kA_k\right)\psi\\=&\ \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\psi^*\left(I+\sum_{k=1}^{3}a_kA_k\right)\psi,\end{aligned}\tag{4.73}$$

其中

$$a_k = \frac{x_k - x_k^0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.74}$$

由 A_k 的泡利 - 狄拉克表象 (4.39), 有

$$\sum_{k=1}^{3} a_k A_k = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k \\ \sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

设 λ 为矩阵 $\sum\limits_{k=1}^{3} a_k A_k$ 的特征值. 因 $\sum\limits_{k=1}^{3} a_k A_k$ 为埃尔米特阵, λ 必为实数. 此外, λ^2 必为矩阵

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k A_k\right)^2 = \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k\right)^2 \end{pmatrix}$$

的特征值, 从而 λ^2 也是矩阵 $\left(\sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k\right)^2$ 的特征值. 但由 (4.50) 和 (4.51) 式易见, $\sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k$ 的特征值为 $\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm 1$, 因此 $\left(\sum\limits_{k=1}^{3} a_k \sigma_k\right)^2$ 的特征值 $\lambda^2 = 1$. 这说明矩阵 $\sum\limits_{k=1}^{3} \alpha_k A_k$ 的特征值 λ 满足

$$|\lambda| = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.76}$$

由 (4.76) 式立即得到, 矩阵 $I + \sum\limits_{k=1}^{3} a_k A_k$ 是半正定的, 即成立

$$\psi^* \left(I + \sum_{k=1}^{3} a_k A_k\right) \psi \geqslant 0, \quad \forall \psi. \tag{4.77}$$

这样, 利用 (4.73) 式, 从 (4.72) 式即得

$$\int_{\Omega_\tau} \rho(\tau, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \rho(0, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

这就完成了定理的证明.

由定理 4.1 立即可以看出, 如果初始值 $\psi^0(\boldsymbol{x})$ 在光锥 $\Gamma(t^0)$ 的底部 Ω_0 中为零, 则由其决定的波函数 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ 在整个光锥 $\Gamma(t^0)$ 内部恒为零. 这就说明, 对于狄拉克方程组, 扰动的传播速度不可能超过光速 c

作为一个推论, 由定理 4.1 还可以得到狄拉克方程组的柯西问题 (4.65)—(4.66) 的解的唯一性.

4.6. 狄拉克方程组的洛伦兹不变性

这一段中, 我们讨论狄拉克方程组在洛伦兹变换下的不变性. 为此, 首先需要考察, 狄拉克波函数 $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)^{\mathrm{T}}$ 是否是一个闵可夫斯基四维时空中的向量. 如果不是, 此波函数在洛伦兹变换下应该如何变换?

首先注意, ρe 就是空间电荷密度, 而 $e\boldsymbol{j}$ 就是电流密度向量, 其中 e 为电子的电量, 而 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别由 (4.18) 和 (4.30) 式给出. $(c\rho e, e\boldsymbol{j})$ 在电磁场理论中称为四维电流密度 (参见第九章 §7). 因此

$$(j^0,j^1,j^2,j^3)=(c\rho,j_1,j_2,j_3) \tag{4.78}$$

是闵可夫斯基四维时空中的向量 (见第九章 §4), 而守恒律方程 (4.29) 则可写为四维散度的形式

$$\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha}=0, \tag{4.79}$$

其中 $(x^0,x^1,x^2,x^3)=(ct,x_1,x_2,x_3)$, 而用希腊字母表示的相同的上、下标意味着从 0 到 3 求和.

下面只讨论正常的洛伦兹变换

$$\bar{x}^\alpha=a^\alpha_\beta x^\beta, \tag{4.80}$$

即设在上述变换中, $\det(a^\alpha_\beta)=1$, 且 $a^0_0>0$. 这实际上排除了 (关于时间或空间的) 反射. 由第九章定理 2.1, 任何一个正常的洛伦兹变换都可由第九章 (2.10) 式给出的特殊形式的洛伦兹变换与一个空间的旋转变换复合而成.

首先考察由第九章 (2.10) 式给出的特殊形式的洛伦兹变换. 它可以写为如下形式

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = (\operatorname{ch}\theta)x^0 - (\operatorname{sh}\theta)x^1, \\ \tilde{x}^1 = -(\operatorname{sh}\theta)x^0 + (\operatorname{ch}\theta)x^1, \\ \tilde{x}^2 = x^2, \\ \tilde{x}^3 = x^3, \end{cases} \tag{4.81}$$

其中

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}, \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \tag{4.82}$$

设在上述洛伦兹变换下, 狄拉克波函数 ψ 变换为 $\tilde{\psi}$. 注意到 $(c\rho, j_1, j_2, j_3)$ 是一个四维向量, 根据闵可夫斯基四维时空中向量的变化规律 (见第九章 §4), 有

$$\tilde{\psi}^*\tilde{\psi} = \psi^*((\operatorname{ch}\theta)I - (\operatorname{sh}\theta)A_1)\psi, \tag{4.83}$$

$$\tilde{\psi}^*A_1\tilde{\psi} = \psi^*((\operatorname{ch}\theta)A_1 - (\operatorname{sh}\theta)I)\psi, \tag{4.84}$$

$$\tilde{\psi}^*A_{2,3}\tilde{\psi} = \psi^*A_{2,3}\psi. \tag{4.85}$$

为了进一步讨论的需要, 给出以下两个引理.

引理 4.2. 设方阵 A 满足 $A^2 = I$, 则

$$e^{\theta A} = (\operatorname{ch}\theta)I + (\operatorname{sh}\theta)A, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}. \tag{4.86}$$

证明 由 $A^2 = I$ 易得, 对任意自然数 n 成立

$$A^{2n} = I, \quad A^{2n+1} = A,$$

从而

$$\operatorname{ch}(\theta A) = \frac{1}{2}(e^{\theta A} + e^{-\theta A}) = (\operatorname{ch}\theta)I,$$

$$\operatorname{sh}(\theta A) = \frac{1}{2}(e^{\theta A} - e^{-\theta A}) = (\operatorname{sh}\theta)A.$$

再注意到 $e^{\theta A} = \operatorname{ch}(\theta A) + \operatorname{sh}(\theta A)$, 就立刻得到引理.

引理 4.3. 设方阵 A 和 B 可对易, 即 $AB = BA$, 则

$$Be^{\theta A} = e^{\theta A}B, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}; \tag{4.87}$$

若 A 和 B 反对易，即 $AB = -BA$. 则

$$Be^{\theta A} = e^{-\theta A}B, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \tag{4.88}$$

证明　证明是显然的，从略.

利用引理 4.2, 并注意到 $A_1^2 = I$, 变换式 (4.83) 和 (4.84) 可以改写为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^*\tilde{\psi} &= \psi^* e^{-\theta A_1}\psi, & (4.89)\\ \tilde{\psi}^* A_1\tilde{\psi} &= \psi^* A_1 e^{-\theta A_1}\psi. & (4.90) \end{aligned}$$

为了使上述两个关系式得以满足，取波函数的变换为

$$\tilde{\psi} = e^{-\frac{\theta}{2}A_1}\psi. \tag{4.91}$$

由于 A_1 为埃尔米特阵，显然有

$$\tilde{\psi}^* = \psi^* e^{-\frac{\theta}{2}A_1}, \tag{4.92}$$

从而 (4.89) 式显然成立. 根据引理 4.3, 又有

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\theta}{2}A_1}A_1 &= A_1 e^{-\frac{\theta}{2}A_1},\\ e^{-\frac{\theta}{2}A_1}A_{2,3} &= A_{2,3}e^{\frac{\theta}{2}A_1}. \end{aligned}$$

由此可见，对于变换 (4.91) 而言，(4.90) 式和 (4.85) 式也成立. 这样，(4.91) 式就是在洛伦兹变换 (4.81) 下波函数的变换式.

下面考察空间坐标系的旋转变换. 不妨设旋转绕 x_3 轴进行，相应的变换为

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = x^0,\\ \tilde{x}^1 = (\cos\phi)x^1 + (\sin\phi)x^2,\\ \tilde{x}^2 = -(\sin\phi)x^1 + (\cos\phi)x^2,\\ \tilde{x}^3 = x^3. \end{cases} \tag{4.93}$$

根据闵可夫斯基四维时空中向量的变化规律，在上述变换下，有

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^*\tilde{\psi} &= \psi^*\psi, & (4.94)\\ \tilde{\psi}^*A_1\tilde{\psi} &= \psi^*((\cos\phi)A_1 + (\sin\phi)A_2)\psi, & (4.95)\\ \tilde{\psi}^*A_2\tilde{\psi} &= \psi^*(-(\sin\phi)A_1 + (\cos\phi)A_2)\psi, & (4.96)\\ \tilde{\psi}^*A_3\tilde{\psi} &= \psi^*A_3\psi. & (4.97) \end{aligned}$$

类似于引理 4.2 和 4.3, 可以证明

引理 4.4. 设方阵 A 满足 $A^2 = I$, 则

$$e^{i\phi A} = (\cos\phi)I + i(\sin\phi)A, \quad \forall\phi\in\mathbb{R}$$

引理 4.5. 设方阵 A 和 B 可对易, 则

$$Be^{i\phi A} = e^{i\phi A}B, \quad \forall\phi\in\mathbb{R};$$

若 A 和 B 反对易, 则

$$Be^{i\phi A} = e^{-i\phi A}B, \quad \forall\phi\in\mathbb{R}.$$

记

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

其中 σ_3 为泡利阵. 容易验证

$$A_2 = i A_1\Sigma_3. \tag{4.99}$$

将 (4.99) 式代入 (4.95) 和 (4.96) 式, 注意到 $\Sigma_3^2 = I$, 并利用引理 4.4 可得: 变换式 (4.95) 和 (4.96) 等价于

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^* A_1\tilde{\psi} &= \psi^* A_1 e^{i\phi\Sigma_3}\psi, & (4.100)\\ \tilde{\psi}^* A_1\Sigma_3\tilde{\psi} &= \psi^* A_1\Sigma_3 e^{i\phi\Sigma_3}\psi. & (4.101)\end{aligned}$$

为使以上两式成立, 取波函数的变换为

$$\tilde{\psi} = e^{i\frac{\phi}{2}\Sigma_3}\psi. \tag{4.102}$$

显然有

$$\tilde{\psi}^* = \psi^* e^{-i\frac{\phi}{2}\Sigma_3}. \tag{4.103}$$

因为 A_1 与 Σ_3 是反对易的, 由引理 4.5 有

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\Sigma_3}A_1 = A_1 e^{i\frac{\phi}{2}\Sigma_3}.$$

由此立即可以看出，对于由 (4.102) 式给出的变换，(4.100) 式成立．除上式外，由引理 4.5 还有

$$\Sigma_3 e^{i\frac{\phi}{2}\Sigma_3} = e^{i\frac{\phi}{2}\Sigma_3}\Sigma_3$$

所以 (4.101) 式也成立．

因为 A_3 与 Σ_3 可对易，由引理 4.5 还可以得到 (4.97) 式．至于 (4.94) 式的正确性则是显然的．因此，(4.102) 式就是在洛伦兹变换 (4.93) 下波函数的变换式．

由 (4.91) 和 (4.102) 两式可以看出，狄拉克波函数的变换规律与闵可夫斯基四维时空中的向量不同．由前可见，向量是用角 θ 或 ϕ 来给出其变化规律的．还可以说明，二阶张量是用双倍角 2θ 或 2ϕ 来给出其变化规律的．但狄拉克波函数的变换是用半角 $\theta/2$ 或 $\phi/2$ 来表示的．这种按 (4.91) 及 (或) (4.102) 式进行变换的量称旋量或半阶张量．

为了说明狄拉克方程组 (4.22) 在波函数的上述变换下保持不变，将它写为如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\gamma^\alpha \psi) - \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0, \tag{4.104}$$

其中

$$\gamma^0 = (-\mathrm{i}\,B)^{-1}, \quad \gamma^k = (-\mathrm{i}\,B)^{-1}A_k \quad (k = 1,2,3). \tag{4.105}$$

记上述波函数的变换为

$$\tilde{\psi} = M\psi, \tag{4.106}$$

并将其代入方程组 (4.104)，就得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\gamma^\alpha M^{-1}\tilde{\psi}) - \frac{m_0 c}{\hbar}M^{-1}\tilde{\psi} = 0. \tag{4.107}$$

再注意到在洛伦兹变换 (4.80) 下有

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = a_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\beta},$$

就可将方程组 (4.107) 写为

$$a_\alpha^\beta \gamma^\alpha M^{-1}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^\beta} - \frac{m_0 c}{\hbar}M^{-1}\tilde{\psi} = 0.$$

用 M 左乘上式两端，就有

$$\left(a_\alpha^\beta M\gamma^\alpha M^{-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\beta}-\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\psi}=0. \tag{4.108}$$

因此，如果波函数的变换 (4.106) 使下式成立：

$$a_\alpha^\beta M\gamma^\alpha M^{-1}=\gamma^\beta \quad (\beta=0,1,2,3), \tag{4.109}$$

狄拉克方程组就在洛伦兹变换下保持不变.

对于由 (4.91) 及 (4.102) 式给出的波函数变换，下面分别对条件 (4.109) 进行验证.

(1) 对于洛伦兹变换 (4.81)，有

$$\begin{aligned}&a_0^0=\operatorname{ch}\theta,\quad a_1^0=-\operatorname{sh}\theta,\\&a_0^1=-\operatorname{sh}\theta,\quad a_1^1=\operatorname{ch}\theta,\\&a_2^2=1,\quad a_3^3=1,\end{aligned}$$

而 (a_α^β) 的其它分量均为零. 此时条件 (4.109) 化为

$$M((\operatorname{ch}\theta)\gamma^0-(\operatorname{sh}\theta)\gamma^1) = \gamma^0M, \tag{4.110}$$

$$M((-\operatorname{sh}\theta)\gamma^0+(\operatorname{ch}\theta)\gamma^1) = \gamma^1M, \tag{4.111}$$

$$M\gamma^2=\gamma^2M \tag{4.112}$$

及

$$M\gamma^3=\gamma^3M, \tag{4.113}$$

其中

$$M=\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}A_1}. \tag{4.114}$$

这里我们只验证 (4.110) 式的正确性. 其它诸式的验证可类似地进行，作为练习留给读者.

利用 (4.114)、(4.105) 及引理 4.2，我们有

$$M((\operatorname{ch}\theta)\gamma^0-(\operatorname{sh}\theta)\gamma^1)=\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}A_1}(-\mathrm{i}\,B)^{-1}\mathrm{e}^{-\theta A_1}.$$

由 A_1 与 B 的反对易性，可得 A_1 与 B^{-1} 的反对易性，故利用引理 4.3 有

$$B^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}A_1}=\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}A_1}B^{-1}.$$

从而

$$
\begin{aligned}
& M((\operatorname{ch}\theta)\gamma^0 - (\operatorname{sh}\theta)\gamma^1) \\
= \ & (-\mathrm{i}\,B)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}A_1}\mathrm{e}^{-\theta A_1} \\
= \ & (-\mathrm{i}\,B)^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}A_1} = \gamma^0 M.
\end{aligned}
$$

这就证得了 (4.110) 式.

(2) 对变换 (4.93), 有

$$
\begin{aligned}
a_0^0 &= 1, \\
a_1^1 &= \cos\phi, \quad a_2^1 = \sin\phi, \\
a_1^2 &= -\sin\phi, \quad a_2^2 = \cos\phi, \\
a_3^3 &= 1,
\end{aligned}
$$

而 (a_α^β) 的其它分量均为零. 此时条件 (4.109) 化为

$$
M\gamma^0 = \gamma^0 M, \tag{4.115}
$$

$$
M((\cos\phi)\gamma^1 + (\sin\phi)\gamma^2) = \gamma^1 M, \tag{4.116}
$$

$$
M(-(\sin\phi)\gamma^1 + (\cos\phi)\gamma^2) = \gamma^2 M \tag{4.117}
$$

及

$$
M\gamma^3 = \gamma^3 M, \tag{4.118}
$$

其中

$$
M = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3} \tag{4.119}
$$

由 (4.105) 及 (4.99) 式, 并利用引理 4.4, 我们得到

$$
\begin{aligned}
& M((\cos\phi)\gamma^1 + (\sin\phi)\gamma^2) \\
= \ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}(-\mathrm{i}\,B)^{-1}((\cos\phi)A_1 + (\sin\phi)A_2) \\
= \ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}(-\mathrm{i}\,B)^{-1}A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\Sigma_3}.
\end{aligned}
$$

容易直接验证: A_1 与 Σ_3 是反对易的, 而 B 与 Σ_3 是可对易的, 从而 B^{-1} 与 Σ_3 是可对易的. 于是, 利用引理 4.5 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}A_1 &= A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}, \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}B^{-1} &= B^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}.
\end{aligned}
$$

这样就得到

$$
\begin{aligned}
& M((\cos\phi)\gamma^1+(\sin\phi)\gamma^2)\\
= & \ (-\mathrm{i}B)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\Sigma_3}\\
= & \ (-\mathrm{i}B)^{-1}A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\Sigma_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\Sigma_3}\\
= & \ \gamma^1 M
\end{aligned}
$$

这就证明了 (4.116) 式. 类似地, 可以验证 (4.117)—(4.118) 及 (4.115) 诸式, 作为练习留给读者

习 题

1 设 $\psi_1(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\psi_2(t,\boldsymbol{x})$ 是薛定谔方程

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(\boldsymbol{x})\psi
$$

的两个解, 且它们连同其对空间变量的一阶偏导数在 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时以足够快的速率趋向于零, 而 $V(\boldsymbol{x})$ 为实值函数 证明

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\psi_1(t,\boldsymbol{x})}\psi_2(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.
$$

2. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一个有界区域, 势场 $V(\boldsymbol{x})$ 为定义在 Ω 中的实值函数, 证明下述初一边值问题的解的唯一性:

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(\boldsymbol{x})\psi, & t>0,\boldsymbol{x}\in\Omega,\\
\psi=0, & t>0,\boldsymbol{x}\in\Omega\text{的边界 }\partial\Omega,\\
\psi=\psi_0(\boldsymbol{x}), & t=0,\boldsymbol{x}\in\Omega,
\end{cases}
$$

其中 $\psi_0(\boldsymbol{x})$ 为给定的函数.

3. 将习题 2 中的边界条件改为

$$
\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\quad t>0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,
$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量. 证明相应的初一边值问题的解的唯一性.

4. 证明

$$E(t,x)=H(t)\frac{1-i}{2a\sqrt{2\pi t}}e^{i\frac{x^2}{4a^2t}}$$

是薛定谔方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-ia^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$

的基本解，其中 $a^2>0$ 为实数

5. 证明从单个粒子的薛定谔方程所得出的粒子速度场是无旋的，即设

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}/\rho,$$

其中 ρ 与 $\boldsymbol{j}$ 分别由 (2.44) 和 (2.45) 式定义，则成立

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=0.$$

6. 设能量为 $E>0$ 的粒子在如下势阱中从左入射：

$$V(x)=\begin{cases}-V_0, & x<0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$$

其中 $V_0>0$ 为常数，试求其在阱壁 $x=0$ 处的反射系数.

7. 假设在势场 $V(\boldsymbol{x})$ 中运动的粒子的波函数 ψ 及其对空间变量的一阶偏导数在 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时以足够快的速率趋向于零. 证明其能量的平均值

$$\langle H\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}W\mathrm{d}x,$$

其中

$$W=\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2+\bar{\psi}V\psi$$

为能量密度.

8. 对习题 7 中定义的能量密度，证明如下的能量守恒定律：

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{Q}=0,$$

其中

$$\boldsymbol{Q}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\nabla\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\bar{\psi}\right)$$

为能量流密度向量.

9 设粒子在势场 $V(\boldsymbol{x})$ 中运动，并以 $\langle\boldsymbol{x}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ 分别表示粒子的位置和动量的平均值. 证明

$$\langle\boldsymbol{p}\rangle = m\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{x}\rangle}{\mathrm{d}t},$$

其中 m 为粒子的质量.

10. 设粒子在光滑势场 $V(\boldsymbol{x})$ 中运动. 记

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= -\nabla V(\boldsymbol{x}),\\ \langle\boldsymbol{f}\rangle &= \int\overline{\psi}\boldsymbol{f}\psi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{p}\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\boldsymbol{f}\rangle,$$

其中 $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ 为粒子动量的平均值. 这说明以量子力学中的平均值代替该力学量，就得到经典力学的结果.

11. 证明任何一个 2 阶复矩阵均可用泡利矩阵 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 及 2 阶单位阵 I 的复线性组合表示.

12. 设在伽利略变换

$$\begin{cases} t' = t,\\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t\end{cases}$$

下，势场 $V(\boldsymbol{x})$ 和波函数 ψ 分别按如下规则变换：

$$\begin{aligned}V'(\boldsymbol{x}') &= V(\boldsymbol{x}),\\ \psi'(t', \boldsymbol{x}') &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}t')/\hbar}\psi(t', \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{v}t').\end{aligned}$$

证明薛定谔方程在伽利略变换下保持不变.

13. 对于由 (4.114) 式给出的波函数变换，验证 (4.111)—(4.113) 式的正确性.

14. 对于由 (4.119) 式给出的波函数变换，验证 (4.117)—(4.118) 及 (4.115) 式的正确性.

参考文献

[1] 曾谨言. 量子力学：卷I 北京：科学出版社， 1990

[2] 曾谨言. 量子力学：卷II. 北京：科学出版社， 1993

[3] 曾谨言. 量子力学导论. 北京：北京大学出版社， 1992

[4] 郭敦仁 量子力学初步. 北京：高等教育出版社， 1978

[5] 谷超豪，李大潜等. 数学物理方程 (第二版). 北京：高等教育出版社， 2002

[6] 谷超豪，李大潜等. 数学物理方程 上海：上海科学技术出版社， 1987

[7] 尤广建. 爱因斯坦是怎样创建相对论的. 长沙：湖南教育出版社， 1993

[8] 卢鹤绂. 哥本哈根学派量子论考释. 上海：复旦大学出版社， 1984

[9] 彭罗斯 R. 皇帝新脑 —— 有关电脑、人脑及物理定律. 许明贤，吴忠超译. 长沙：湖南科学技术出版社， 1993

[10] 霍金 S. 时间简史 —— 从大爆炸到黑洞. 许明贤，吴宗超译. 长沙：湖南科学技术出版社， 1995

[11] 特勒弗斯 F. 基本线性偏微分方程. 陆柱家译. 上海：上海科学技术出版社， 1982

[12] 杰克逊 J D 经典电动力学 (下册). 朱培豫译. 北京：人民教育出版社， 1980

[13] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer–Verlag, New York Inc., 1983

[14] 周世勋. 量子力学. 上海：上海科学技术出版社， 1961

[15] 朗道 L D, 栗弗席茨 E M. 量子力学 (非相对论理论) (上册). 严肃译. 北京：人民教育出版社， 1980

[16] 齐民友. 世纪之交话数学. 武汉：湖北教育出版社， 2000

附录二　闵可夫斯基四维时空中的张量

1. 闵可夫斯基四维时空与洛伦兹变换

定义 1. 在四维实线性空间 $V = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4\}$ 中定义如下内积：

$$\langle x, y\rangle = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3, \quad \forall x, y \in V, \tag{1}$$

则称该线性空间为闵可夫斯基四维时空，记为 M.

对 $x, y \in M$，若

$$\langle x, y\rangle = 0, \tag{2}$$

则称 x 与 y 正交. 若 $x \in M$，且 $\langle x, x\rangle = \pm 1$，则称 x 为单位向量

需要注意的是，这里用以定义内积 (1) 的二次型并不是正定的.

下面一组向量

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

显然可作为 M 的一个基，而且它们满足

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = g_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \tag{4}$$

其中

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha = \beta = 0, \\ -1, & \text{当 } \alpha = \beta = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{当 } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{5}$$

闵可夫斯基四维时空 M 中满足条件 (4) 的基称为标准正交基.

定义 2. 设 $L: M \to M$ 是一个线性变换. 如果在该变换下, M 中的任意两个向量的内积保持不变, 即成立

$$\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in M, \tag{6}$$

则称 L 为 M 中的正交变换, 也称为洛伦兹变换.

正如欧氏空间中的正交变换在定义笛卡儿张量 (见附录一) 时所起的作用那样, 洛伦兹变换在定义闵可夫斯基四维时空中的张量时, 起着基本的作用.

容易直接验证: 洛伦兹变换将 M 中的标准正交基变换为标准正交基.

设 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 为 M 的一个标准正交基, L 为洛伦兹变换. 记

$$e'_\alpha = Le_\alpha \quad (\alpha = 0, \cdots, 3). \tag{7}$$

并记

$$e'_\alpha = a^\gamma_\alpha e_\gamma \quad (\alpha = 0, \cdots, 3), \tag{8}$$

其中 a^γ_α 为实数, 而由希腊字母表示的相同的上、下标意味着按该指标从 0 到 3 求和. 由于 $\{e_0, \cdots, e_3\}$ 为 M 中的标准正交基, 由 (8) 式和 (4) 式得

$$\begin{aligned}\langle e'_\alpha, e'_\beta\rangle &= a^\gamma_\alpha a^\delta_\beta \langle e_\gamma, e_\delta\rangle \\ &= a^\gamma_\alpha a^\delta_\beta g_{\gamma\delta}.\end{aligned} \tag{9}$$

再注意到 $\{e'_0, \cdots, e'_3\}$ 也是 M 中的标准正交基, 由 (9) 式和 (4) 式立即得到

$$a^\gamma_\alpha a^\delta_\beta g_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^1_0 & a^2_0 & a^3_0 \\ a^0_1 & a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^0_2 & a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^0_3 & a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

注意到 $g_{\alpha\beta}$ 的定义 (5), 由 (10) 式不难看出: 由 (8) 式给出的线性变换 L 为洛伦兹变换的充要条件为其相应的变换矩阵 A 的行向量构成 M 的标准正交基.

不难证明 (作为习题), (10) 式等价于

$$a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta g^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}, \tag{12}$$

这里 $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. 这说明：由 (8) 式给出的线性变换 L 为洛伦兹变换的充要条件亦为矩阵 A 的列向量构成 M 的标准正交基. (12) 式又可等价地写为如下的矩阵形式：

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 A^{T} 表示 A 的转置.

由 (13) 式，有

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_0^0 & -a_1^0 & -a_2^0 & -a_3^0\\ -a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ -a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{14}$$

记 $B = A^{-1}$ 的元素为 b_α^β, 就可由 (8) 式得到标准正交基 $\{e_0,\cdots,e_3\}$ 用 $\{e_0',\cdots,e_3'\}$ 表示的形式

$$e_\alpha = b_\alpha^\beta e_\beta' \quad (\alpha = 0,\cdots,3). \tag{15}$$

2. 闵可夫斯基四维时空中的张量

首先考察 M 中的向量在洛伦兹变换下的变换情况.

设 $\{e_0,\cdots,e_3\}$ 为 M 的一个标准正交基. M 中任一向量 x 均可由这组基来线性表示：

$$x = u^\alpha e_\alpha. \tag{16}$$

又设 L 为由 (8) 式给出的洛伦兹变换，且在新的标准正交基 $\{e'_0, \cdots, e'_3\}$ 下，x 表示为

$$x = u'^{\beta} e'_{\beta}. \tag{17}$$

将 (15) 式表示的 c_α 代入 (16) 式得

$$x = b^{\beta}_{\alpha} u^{\alpha} e'_{\beta}. \tag{18}$$

将它与 (17) 式比较，就得到

$$u'^{\beta} = b^{\beta}_{\alpha} u^{\alpha} \quad (\beta = 0, 1, 2, 3) \tag{19}$$

在欧氏空间中，向量分量的变换公式与标准正交基的变换公式是一致的 (参见附录一)．但对于闵可夫斯基四维时空，向量分量的变换公式 (19) 与标准正交基的变换公式 (8) 是不同的．基的变换式 (8) 由矩阵 A 给出，而向量分量的变换式 (19) 由 A 的逆阵的转置给出．

定义 3. 设一个量在闵可夫斯基四维时空 M 的一个标准正交基下，由四个实数 (u^{α}) 表示；而当经洛伦兹变换 (8) 变为新的标准正交基时，它由四个实数 (u'^{α}) 表示．如果满足以下关系

$$u'^{\beta} = b^{\beta}_{\alpha} u^{\alpha} \quad (\beta = 0, \cdots, 3), \tag{20}$$

就称 (u^{α}) 为逆变向量或一阶逆变张量．

类似地，我们可以定义二阶张量．

定义 4. 设一个量在闵可夫斯基四维时空 M 的一个标准正交基下可由 16 个实数 $(T^{\alpha\beta})$ 表示；而当经洛伦兹变换 (8) 变为新的标准正交基时，它由 16 个实数 $(T'^{\alpha\beta})$ 表示．如果满足

$$T'^{\alpha\beta} = b^{\alpha}_{\gamma} b^{\beta}_{\delta} T^{\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3), \tag{21}$$

就称 $(T^{\alpha\beta})$ 为二阶逆变张量．

闵可夫斯基时空中的高阶逆变张量的定义可类似地给出，不赘述．

给定一个向量 $x \in M$ 以及 M 中的一个标准正交基．用 (u^{α}) 即用 (16) 式并不是唯一地表示该向量的方法．实际上，该向量还可用如下定义的分量 (u_{α}) 表示：

$$u_{\alpha} = \langle x, e_{\alpha} \rangle \quad (\alpha = 0, \cdots, 3). \tag{22}$$

和分量 (u^α) 一样，分量 (u_α) 与 x 之间也有一一对应关系.

在由洛伦兹变换 (8) 变到新的标准正交基 $\{e'_\alpha\}$ 时，上述分量变为

$$u'_\alpha = \langle x, e'_\alpha \rangle \quad (\alpha = 0, \cdots, 3). \tag{23}$$

将 (8) 式代入上式，即得

$$u'_\alpha = a_\alpha^\gamma \langle x, e_\gamma \rangle = a_\alpha^\gamma u_\gamma \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{24}$$

这说明，对向量的这种分量，在洛伦兹变换下的变换法则与标准正交基的变换法则 (8) 完全一样.

定义 5. 设一个量在闵可夫斯基四维时空 M 中的一个标准正交基下，可由四个实数 (u_α) 表示；而当经洛伦兹变换 (8) 变为新的标准正交基时，它由四个实数 (u'_α) 表示. 如果满足

$$u'_\alpha = a_\alpha^\gamma u_\gamma \quad (\alpha = 0, \cdots, 3), \tag{25}$$

则称 (u_α) 为协变向量或一阶协变张量. 二阶协变张量 $(T_{\alpha\beta})$ 则由如下变换法则定义：

$$T'_{\alpha\beta} = a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta T_{\gamma\delta} \quad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3). \tag{26}$$

类似地，可以定义二阶混合张量 (T_α^β)，其变换法则为

$$T'^\beta_\alpha = a_\alpha^\gamma b_\delta^\beta T_\gamma^\delta. \tag{27}$$

类似地还可定义高阶混合张量. 零阶张量就是标量，即该量由一个实数表示，且在洛伦兹变换下，该数保持不变.

容易验证

$$(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

既是二阶逆变张量，又是二阶协变张量. 它在一切坐标系下的形式均保持不变. 这里及以后，为了叙述方便起见，对于不同的标准正交基，简单地说在不同的坐标系下.

3. 张量的计算

张量的线性运算是不说自明的，下面着重说明张量的乘积和缩并.

1) 张量的乘积

我们仅以下面的情况为例予以说明. 设 (u^α) 为一阶逆变张量，(T^γ_β) 为二阶混合张量，则它们的张量积 $(u^\alpha T^\gamma_\beta)$ 为三阶混合张量 $(S^{\alpha\gamma}_\beta)$，即一个二阶逆变、一阶协变的混合张量. 事实上，在新坐标系下

$$\begin{aligned} S'^{\alpha\gamma}_\beta &= u'^\alpha T'^\gamma_\beta = b^\alpha_\lambda u^\lambda a^\mu_\beta b^\gamma_\nu T^\nu_\mu \\ &= b^\alpha_\lambda a^\mu_\beta b^\gamma_\nu S^{\lambda\nu}_\mu \end{aligned}$$

2) 张量的缩并

对一个混合张量的分量，令其一对上、下指标相等，并对该指标从 0 到 3 求和，相应的运算称为张量的缩并. 一个张量缩并后仍为张量，但其阶数较原张量低二阶. 例如，设 $(S^{\alpha\beta}_\gamma)$ 为三阶混合张量，则 $u^\alpha = (S^{\alpha\beta}_\beta)$ 为一阶逆变张量. 事实上，在新坐标系下

$$u'^\alpha = S'^{\alpha\beta}_\beta = b^\alpha_\lambda b^\beta_\mu a^\nu_\beta S^{\lambda\mu}_\nu. \tag{29}$$

因为 B 为 A 的逆阵，所以

$$b^\beta_\mu a^\nu_\beta = \begin{cases} 1, & 当\ \mu = \nu, \\ 0, & 当\ \mu \neq \nu \end{cases}$$

这样，(29) 式可以写为

$$u'^\alpha = b^\alpha_\lambda S^{\lambda\mu}_\mu = b^\alpha_\lambda u^\lambda.$$

这就说明 $(S^{\alpha\beta}_\beta)$ 为一阶逆变张量.

例 1. 设 (u^α) 与 (w_β) 分别为一阶逆变张量和一阶协变张量，则 $(u^\alpha w_\alpha)$ 为标量. 实际上 $(u^\alpha w_\alpha)$ 是两个张量相乘得到的二阶混合张量 $(u^\alpha w_\beta)$ 再进行缩并运算的结果.

例 2. 设 $(T_{\alpha\beta})$ 为二阶协变张量，(u^γ) 为一阶逆变张量，则 $(T_{\alpha\beta}u^\beta)$ 为一阶协变张量.

例 3. 设 (u^α) 为一阶逆变张量. 因为 $(g_{\alpha\beta})$ 为二阶协变张量，故

$$(u_\alpha) = (g_{\alpha\beta}u^\beta)$$

为一阶协变张量. u_α 称为一阶逆变张量 (u^α) 的协变分量. 反过来还有

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta}u_\beta.$$

实际上, 由 $g_{\alpha\beta}$ 与 $g^{\alpha\beta}$ 的定义 (28) 容易看出, 向量的逆变分量 u^α 与协变分量 u_α 之间存在如下的简单关系:

$$u_0 = u^0,\quad u_1 = -u^1,\quad u_2 = -u^2,\quad u_3 = -u^3 \tag{30}$$

4. 张量的协变导数

设一张量的分量在一个坐标系下是点的坐标 (x^α) 的函数, 现考察该张量关于 (x^α) 的导数. 以二阶逆变张量 $(T^{\alpha\beta})$ 为例予以说明. 记

$$S_\gamma^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \tag{31}$$

则 $(S_\gamma^{\alpha\beta})$ 为三阶混合张量. 这就是说, 将张量的分量关于 (x^α) 求一次梯度, 张量就增加一个协变指标, 阶数也增加一阶. 事实上, 在新的坐标系下

$$\begin{aligned} S'^{\alpha\beta}_\gamma &= \frac{\partial T'^{\alpha\beta}}{\partial x'^\gamma} \\ &= \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}(b_\lambda^\alpha b_\mu^\beta T^{\lambda\mu}) \\ &= a_\gamma^\delta b_\lambda^\alpha b_\mu^\beta \frac{\partial T^{\lambda\mu}}{\partial x^\delta} \\ &= a_\gamma^\delta b_\lambda^\alpha b_\mu^\beta S_\delta^{\lambda\mu}. \end{aligned} \tag{32}$$

这里我们利用了

$$x^\delta = a_\gamma^\delta x'^\gamma, \tag{33}$$

它容易由 (19) 式得到. (32) 式说明 $(S_\gamma^{\alpha\beta})$ 为一阶协变、二阶逆变的三阶混合张量.

索　引

(按汉语拼音次序排列，名词后的数字是该名词出现的页码)

B

巴耳末系　236
半阶张量　291
本构方程　9
本构关系　9
彼得罗夫斯基意义下的抛物型方程组　249
标量　302
标准正交基　299
波包　243
波动力学　240
玻尔兹曼常量　103, 233
玻尔兹曼方程　105, 107
玻尔兹曼 H 定理　116, 117
波函数　241, 243
不确定关系　240

C

测不准关系　265
测不准原理　240
查普曼 - 恩斯科格展开　134
场强张量　218
次椭圆　251

D

单积分形式　46

单积分形式的核 49
单位向量 184, 298
狄拉克方程组 279
定态 253
定态薛定谔方程 253
动量守恒定律 191
动量守恒方程组 128
对偶张量 218
对易式 263

E

二阶混合张量 302
二阶逆变张量 301
二阶拟线性双曲 抛物耦合方程组 24
二阶拟线性双曲型积分 偏微分方程组 79
二阶拟线性沃尔泰拉型积分 偏微分方程组 78
二阶线性双曲 抛物耦合方程组 19 20
二阶线性椭圆型偏微分方程组 77
二阶线性沃尔泰拉型积分 偏微分方程组 71
二阶协变张量 302

F

反碰撞 112
分布函数 102
分子混沌性假设 113
非局部型 74
非齐次 (材料) 9
非弹性碰撞 192
非线性积分 - 微分方程 116
非线性热弹性动力学方程组 23
费米子 268
伏拉索夫方程 146

伏拉索夫 麦克斯韦方程组 149
伏拉索夫 泊松方程组 147
负能量解 280

G

高阶混合张量 302
各向同性 12
各向异性 12
概率波 247
概率流密度向量 248, 274
光电效应 235
光电子 235
光量子 235
光量子假设 235
光锥 177
光子 235
惯性质量 188
固有参考系 194
固有时间间隔 187
固有系 194
规范化 260
归一化 260

H

亥姆霍兹自由能 10
哈密顿量 242
哈密顿算子 242
耗散 (单积分形式) 52
耗散不等式 52
耗散势 52
赫维赛德函数 66
黑体 233

J

伽利略变换 161
伽利略相对性原理 161
加速度波 30, 92
静上能量 189
静上质量 188
基态 255
矩阵力学 239

K

开尔文模型 44
克劳修斯 杜海姆不等式 9
克莱因 - 高登方程 267

L

拉梅松弛模量 64
里德伯常量 236
理想磁流体的能量 动量张量 223
量子态 242
连续性方程 127, 198
零阶张量 302
洛伦兹变换 168, 299

M

麦克斯韦 玻尔兹曼分布 119
麦克斯韦模型 43
闵可夫斯基力 189
闵可夫斯基四维时空 180, 298

N

能量 动量不变量 189
能量 动量公式 189
能量 动量张量 193
能量积分 22
能量流密度向量 296
能量密度 295
能量守恒定律 1
能量守恒方程 130
能量特征函数 253
能量特征态 253
能量特征值 253
逆变向量 301
逆三角形不等式 181
拟稳态问题 77
粘弹性材料 40, 41
粘弹性固体 68
粘弹性流体 68
粘弹性体 40, 41
牛顿实验定律 36

O

欧拉方程 128, 201

P

泡利 狄拉克表象 276
泡利算子 269
泡利阵 271
碰撞参数 110
碰撞项 107
平衡分布函数 116

平衡弹性张量 63, 77
平衡响应函数 49
平均自由程 134
普朗克常量 234

Q

齐次 (材料) 9
强椭圆性条件 72
强正定 82
氢原子模型 237
群速度 245

R

热传导矩阵 16, 17
热传导率 23
热传导张量 16
热交换系数 37
热辐射 232
热弹性体 1
蠕变 67
蠕变函数 65
蠕变张量 64
瑞利问题 84
瑞利 – 金斯公式 233
弱间断线 30
入射流 110

S

散射角 108
熵不等式 1, 9
色散 245

色散波 245, 252
色散关系 244
事件 180
世界线 186
守恒定理 126
衰减记忆假设 66
双曲型 72, 79
瞬时导数 56
瞬时弹性张量 63
四维磁场向量 222
四维电场向量 222
四维电流密度 215
四维动量 188
四维二阶 (逆变) 张量 186
四维加速度 188
四维力 189
四维能量 - 动量向量 188
四维速度 187
四维 (逆变) 向量 186
松弛函数 65
松弛张量 61
隧道效应 259

T

弹性率 23
弹性碰撞 107
弹性系数 42
弹性张量 23
退化抛物型方程组 249

W

微分散射截面 110
完全非弹性碰撞 192
完全弹性碰撞 192
物质波 238

X

相对论电磁流体的能量 - 动量张量 221
相对论理想磁流体力学方程组 224
相对论理想流体力学方程组 198
相对性原理 161
相速度 245
线膨胀系数 18
线性粘弹性动力学方程组 71
线性粘弹性体 62
线性热弹性动力学方程组 19
线性双曲型沃尔泰拉积分 - 偏微分方程组 72
线性退化 212
协变向量 302
旋量 291
旋量波函数 269
薛定谔方程 240, 242

Y

一阶埃尔米特双曲型偏微分方程组 283
一阶非线性双曲型积分 - 偏微分方程组 154
一阶逆变张量 301
一阶拟线性双曲型方程组 209
一阶协变张量 302
一维非线性粘弹性动力学方程 80
一维非线性热弹性动力学方程组 25

一维拟线性双曲－抛物耦合方程组 27, 28

Z

张量的缩并 303
正电子 283
正定 82
正交 184, 298
正交变换 184, 299
正能量解 280
真正非线性 35, 97, 212
质心坐标系 109
总截面 111
总能量 188
阻尼系数 42